Approximation de la distribution quasi-stationnaire d'une diffusion avec drift non borné.

Denis Villemonais

CMAP - École Polytechnique

9 octobre 2008

Introduction

(X_t) processus de Markov avec extinction (GW, brownien tué au bord d'un ouvert, ...)

Introduction

(X_t) processus de Markov avec extinction (GW, brownien tué au bord d'un ouvert, ...)

Sujet d'étude

- (X_t) conditionné à la non-extinction

Introduction

(X_t) processus de Markov avec extinction (GW, brownien tué au bord d'un ouvert, ...)

Sujet d'étude

- (X_t) conditionné à la non-extinction
- Distribution quasi-stationnaire (QSD)

Introduction

(X_t) processus de Markov avec extinction (GW, brownien tué au bord d'un ouvert, ...)

Sujet d'étude

- (X_t) conditionné à la non-extinction
- Distribution quasi-stationnaire (QSD)

Exemples

- Arbres de Galton-Watson : limite de Yaglom

Introduction

(X_t) processus de Markov avec extinction (GW, brownien tué au bord d'un ouvert, ...)

Sujet d'étude

- (X_t) conditionné à la non-extinction
- Distribution quasi-stationnaire (QSD)

Exemples

- Arbres de Galton-Watson : limite de Yaglom
- Sain $\underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}}$ Malade $\underset{0}{\overset{1}{\rightleftharpoons}}$ Mort
  Taux de mortalité après un temps long?

Définition

- *On note μ_t la distribution au temps t du processus X partant de μ et conditionné à la non-absorption avant t:*

$$\mu_t(A) = \frac{\int_E P_x\left(X_t \in A\right) d\mu(x)}{1 - \int_E P_x\left(X_t = \partial\right) d\mu(x)},$$

- ν *est une* **Distribution quasi-stationnaire (QSD)** *ssi* $\nu = \nu_t$ *pour tout* $t \geq 0$.

Définition

- *On note μ_t la distribution au temps t du processus X partant de μ et conditionné à la non-absorption avant t:*

$$\mu_t(A) = \frac{\int_E P_x(X_t \in A) d\mu(x)}{1 - \int_E P_x(X_t = \partial) d\mu(x)},$$

- *ν est une* **Distribution quasi-stationnaire (QSD)** *ssi $\nu = \nu_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Résultats d'existence et d'unicité:

- Cas fini

Définition

- *On note μ_t la distribution au temps t du processus X partant de μ et conditionné à la non-absorption avant t:*

$$\mu_t(A) = \frac{\int_E P_x(X_t \in A) d\mu(x)}{1 - \int_E P_x(X_t = \partial) d\mu(x)},$$

- *ν est une* **Distribution quasi-stationnaire (QSD)** *ssi $\nu = \nu_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Résultats d'existence et d'unicité:

- Cas fini
- Cas discret

Définition

- *On note μ_t la distribution au temps t du processus X partant de μ et conditionné à la non-absorption avant t:*

$$\mu_t(A) = \frac{\int_E P_x(X_t \in A) d\mu(x)}{1 - \int_E P_x(X_t = \partial) d\mu(x)},$$

- *ν est une* **Distribution quasi-stationnaire (QSD)** *ssi $\nu = \nu_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Résultats d'existence et d'unicité:

- Cas fini
- Cas discret
- Cas continu: R.G. Pinsky (1985)

Définition

- *On note μ_t la distribution au temps t du processus X partant de μ et conditionné à la non-absorption avant t:*

$$\mu_t(A) = \frac{\int_E P_x(X_t \in A) d\mu(x)}{1 - \int_E P_x(X_t = \partial) d\mu(x)},$$

- *ν est une* **Distribution quasi-stationnaire (QSD)** *ssi $\nu = \nu_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Résultats d'existence et d'unicité:

- Cas fini
- Cas discret
- Cas continu: R.G. Pinsky (1985)
  P. Cattiaux, P. Collet, A. Lambert, S. Martinez, S. Méléard, J. San Martin (2007)

Données du problème

X diffusion définie sur $]a,b[$ par l'EDS

$$dX_t = dB_t - q(X_t)dt,$$

tuée en a et en b.

Données du problème

X diffusion définie sur $]a,b[$ par l'EDS

$$dX_t = dB_t - q(X_t)dt,$$

tuée en a et en b.
Cas borné $-\infty < a < b < +\infty$, q continu borné. $\exists!$ QSD donnée par la limite de Yaglom.

Données du problème

X diffusion définie sur $]a,b[$ par l'EDS

$$dX_t = dB_t - q(X_t)dt,$$

tuée en a et en b.
Cas borné $-\infty < a < b < +\infty$, q continu borné. $\exists!$ QSD donnée par la limite de Yaglom.
Cas non-borné $]a,b[=]0,+\infty[$ et q explose à la frontière. On retrouve le même résultat sous certaines hypothèses, dont:

- Le processus s'éteint en temps fini presque sûrement,
- Le processus descend de l'infini en temps fini.

Toutes se rapportent à des conditions sur q.

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.
- Solution (K. Burdzy, R. Holyst et P. March (2000)): approximation basée sur la limite hydrodynamique d'un système de particules en interaction.

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.
- Solution (K. Burdzy, R. Holyst et P. March (2000)): approximation basée sur la limite hydrodynamique d'un système de particules en interaction.

Le processus de Fleming-Viot à N particules $(X^1, X^2, \dots, X^N)$ avec $N \geq 2$

- Distribution initiale $\mu^N(0, dx) = \sum_{i=1}^N \delta_{X_0^i}(dx)$

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.
- Solution (K. Burdzy, R. Holyst et P. March (2000)): approximation basée sur la limite hydrodynamique d'un système de particules en interaction.

Le processus de Fleming-Viot à N particules $(X^1, X^2, \ldots, X^N)$ avec $N \geq 2$

- Distribution initiale $\mu^N(0, dx) = \sum_{i=1}^N \delta_{X_0^i}(dx)$
- Chaque particule X^i évolue indépendamment des autres selon la loi de X jusqu'au premier temps d'extinction τ_1

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.
- Solution (K. Burdzy, R. Holyst et P. March (2000)): approximation basée sur la limite hydrodynamique d'un système de particules en interaction.

Le processus de Fleming-Viot à N particules $(X^1, X^2, \ldots, X^N)$ avec $N \geq 2$

- Distribution initiale $\mu^N(0,dx) = \sum_{i=1}^N \delta_{X_0^i}(dx)$
- Chaque particule X^i évolue indépendamment des autres selon la loi de X jusqu'au premier temps d'extinction τ_1
- Au temps τ_1, la particule tuée saute en la position d'une des $N-1$ particules restantes

Cas borné

- Problème: valeur numérique de la DQS.
- Solution (K. Burdzy, R. Holyst et P. March (2000)): approximation basée sur la limite hydrodynamique d'un système de particules en interaction.

Le processus de Fleming-Viot à N particules $(X^1, X^2, \ldots, X^N)$ avec $N \geq 2$

- Distribution initiale $\mu^N(0,dx) = \sum_{i=1}^N \delta_{X_0^i}(dx)$
- Chaque particule X^i évolue indépendamment des autres selon la loi de X jusqu'au premier temps d'extinction τ_1
- Au temps τ_1, la particule tuée saute en la position d'une des $N-1$ particules restantes
- Le même mécanisme est appliqué: $\tau_n \to \tau_\infty$, $(X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^N)_{t\in[0,\tau_\infty[}$

Cas non-borné

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, avec un drift non-borné.

- Problème: le processus de Fleming-Viot n'a pas de raison d'exister.

Cas non-borné

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, avec un drift non-borné.

- Problème: le processus de Fleming-Viot n'a pas de raison d'exister.
- Solution: se restreindre à un intervalle tronqué et le faire tendre vers l'intervalle initial.

Cas non-borné

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, avec un drift non-borné.

- Problème: le processus de Fleming-Viot n'a pas de raison d'exister.
- Solution: se restreindre à un intervalle tronqué et le faire tendre vers l'intervalle initial.

X^ϵ processus défini sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$ comme X, mais tué en ϵ et $1/\epsilon$.
On note ν_ϵ la QSD associée.

Cas non-borné

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, avec un drift non-borné.

- Problème: le processus de Fleming-Viot n'a pas de raison d'exister.
- Solution: se restreindre à un intervalle tronqué et le faire tendre vers l'intervalle initial.

X^ϵ processus défini sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$ comme X, mais tué en ϵ et $1/\epsilon$.
On note ν_ϵ la QSD associée.
Objectif: Conditions sous lesquelles $\nu_\epsilon \to \nu$ quand $\epsilon \to 0$.

Cas non-borné

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$, avec un drift non-borné.

- Problème: le processus de Fleming-Viot n'a pas de raison d'exister.
- Solution: se restreindre à un intervalle tronqué et le faire tendre vers l'intervalle initial.

X^ϵ processus défini sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$ comme X, mais tué en ϵ et $1/\epsilon$.
On note ν_ϵ la QSD associée.
Objectif: Conditions sous lesquelles $\nu_\epsilon \to \nu$ quand $\epsilon \to 0$.
Méthode: Donner des critères de tension, caractériser l'ensemble des mesures limites et conclure par unicité.

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \ldots, Y^N)$ évoluant dans $[0,1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1, \ldots, N$

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \ldots, Y^N)$ évoluant dans $[0, 1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1, \ldots, N$

- $Y_0^i = \min(X_0^i, 1 - X_0^i, \frac{1}{3})$

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \ldots, Y^N)$ évoluant dans $[0, 1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1, \ldots, N$

- $Y_0^i = \min(X_0^i, 1 - X_0^i, \frac{1}{3})$
- Si $X_0^i \in]\frac{1}{3}, 1]$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, où $Q = \sup_{x \in]0,1[} |q(x)| + 1$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \ldots, Y^N)$ évoluant dans $[0, 1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1, \ldots, N$

- $Y_0^i = \min(X_0^i, 1 - X_0^i, \frac{1}{3})$
- Si $X_0^i \in]\frac{1}{3}, 1]$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, où $Q = \sup_{x \in]0,1[} |q(x)| + 1$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$
- Quand X^i heurte $]0, \frac{1}{3}]$, $dY_t^i = dB_t^i - Qdt$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \dots, Y^N)$ évoluant dans $[0, 1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1, \dots, N$

- $Y_0^i = \min(X_0^i, 1 - X_0^i, \frac{1}{3})$
- Si $X_0^i \in]\frac{1}{3}, 1]$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, où $Q = \sup_{x \in]0,1[} |q(x)| + 1$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$
- Quand X^i heurte $]0, \frac{1}{3}]$, $dY_t^i = dB_t^i - Qdt$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$
- Quand X^i heurte $[\frac{2}{3}, 1[$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, ...

Construction d'un système de particules indépendantes

$(Y^1, Y^2, \ldots, Y^N)$ évoluant dans $[0,1/3]$ tel que
$0 \leq Y^i \leq X^i \leq 1 - Y^i$, $i = 1,\ldots,N$

- $Y_0^i = \min(X_0^i, 1 - X_0^i, \frac{1}{3})$
- Si $X_0^i \in]\frac{1}{3}, 1]$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, où $Q = \sup_{x\in]0,1[} |q(x)| + 1$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$
- Quand X^i heurte $]0, \frac{1}{3}]$, $dY_t^i = dB_t^i - Qdt$
- Y^i est réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$
- Quand X^i heurte $[\frac{2}{3}, 1[$, $dY_t^i = -dB_t^i - Qdt$, ...

$(Y_t^1, \ldots, Y_t^N)$ défini $\forall t \in [0, \tau_\infty[$

Y^i diffusion définie par $dY_t^i = dW_t^i - Qdt$, réfléchie en 0 et $\frac{1}{3}$
W^i mouvements browniens indépendants

Y^i diffusion définie par $dY_t^i = dW_t^i - Qdt$, réfléchie en 0 et $\frac{1}{3}$
W^i mouvements browniens indépendants
Y^i prolongé sur $[\tau_{\infty,+\infty}[$

Y^i diffusion définie par $dY_t^i = dW_t^i - Qdt$, réfléchie en 0 et $\frac{1}{3}$
W^i mouvements browniens indépendants
Y^i prolongé sur $[\tau_{\infty,+\infty}[$

- Indépendance: Loi des grands nombres

Y^i diffusion définie par $dY_t^i = dW_t^i - Qdt$, réfléchie en 0 et $\frac{1}{3}$
W^i mouvements browniens indépendants
Y^i prolongé sur $[\tau_{\infty,+\infty}[$

- Indépendance: Loi des grands nombres
- Girsanov: Non dégénérescence des particules vers la frontière

Rappel: Théorème de Girsanov
$\Longrightarrow$ loi de Y^i abs. continue / brownien réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$.

Y^i diffusion définie par $dY^i_t = dW^i_t - Qdt$, réfléchie en 0 et $\frac{1}{3}$
W^i mouvements browniens indépendants
Y^i prolongé sur $[\tau_{\infty,+\infty}[$

- Indépendance: Loi des grands nombres
- Girsanov: Non dégénérescence des particules vers la frontière

Rappel: Théorème de Girsanov
$\Longrightarrow$ loi de Y^i abs. continue / brownien réfléchi en 0 et $\frac{1}{3}$.

Existence du processus de FV à N particules

$$\forall x \in]0,1[^N,\ C_x = \{\tau_\infty < \infty, \text{ FV partant de } x\}.$$

Existence du processus de FV à N particules

$\forall x \in]0,1[^N,\ C_x = \{\tau_\infty < \infty, \text{ FV partant de } x\}$.

- Les particules X^i tendent vers la frontière quand $t \to \tau_\infty$:
  $\forall i,\ \min(X^i_t, 1 - X^i_t) \to 0$

Existence du processus de FV à N particules

$\forall x \in]0,1[^N,\ C_x = \{\tau_\infty < \infty,\ \text{FV partant de } x\}.$

- Les particules X^i tendent vers la frontière quand $t \to \tau_\infty$:
  $\forall i,\ \min(X_t^i, 1 - X_t^i) \to 0$
- Inégalités de couplage et continuité de Y^i
  $\Longrightarrow C_x \subset \{(Y^1_{\tau_\infty}, Y^2_{\tau_\infty}) = (0,0)\}$

Existence du processus de FV à N particules

$\forall x \in]0,1[^N,\ C_x = \{\tau_\infty < \infty, \text{FV partant de } x\}$.

- Les particules X^i tendent vers la frontière quand $t \to \tau_\infty$: $\forall i,\ \min(X^i_t, 1 - X^i_t) \to 0$
- Inégalités de couplage et continuité de Y^i $\Longrightarrow C_x \subset \{(Y^1_{\tau_\infty}, Y^2_{\tau_\infty}) = (0,0)\}$
- En définitive, $\forall x \in]0,1[^N,\ P(C_x) = 0$

Exponentielle ergodicité du processus de FV à N particules

Définition

T-squelette *du processus de FV:* $(X^1_{nT}, \ldots X^N_{nT})_{n\in\mathbb{N}}$

Exponentielle ergodicité du processus de FV à N particules

Définition

T-squelette *du processus de FV:* $(X^1_{nT},\ldots X^N_{nT})_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème (D. Down, S.P. Meyn and R.L. Tweedie)

Soit Φ un processus de markov φ-irreductible et apériodique. S'il existe $T > 0$ tel que le T-squelette de Φ est géométriquement ergodique, alors Φ est exponentiellement ergodique.

Exponentielle ergodicité du processus de FV à N particules

Définition

T-squelette *du processus de FV:* $(X^1_{nT},\ldots X^N_{nT})_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème (D. Down, S.P. Meyn and R.L. Tweedie)

Soit Φ *un processus de markov* φ*-irreductible et apériodique. S'il existe* $T > 0$ *tel que le* T*-squelette de* Φ *est géométriquement ergodique, alors* Φ *est exponentiellement ergodique.*

Théorème (D. Down, S.P. Meyn and R.L. Tweedie)

Soit Φ *une chaîne de Markov* φ*-irreductible et apériodique. S'il existe un "small set"* $C \in \mathcal{B}(X)$ *et* $\kappa > 1$ *tels que*

$$\sup_{x\in C} \mathbf{E}_x[\kappa^{\tau_C}] < \infty,$$

alors Φ *est géométriquement ergodique.*

Géométrique ergodicité du 1-squelette

φ-**irreductibilité**:
$\varphi(A) > 0$ implique $P_x(\tau_A < \infty) > 0 \ \forall x \in]0,1[^N$
"Small set"
$C =]r,1-r[^N$ (avec $r > 0$) est un "small set" pour le 1-squelette
$\exists \vartheta$, $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, tels que

$$P^n(x,A) \geq \epsilon \vartheta(A),\ A \in \mathcal{B}(X),\ \forall x \in C.$$

Géométrique ergodicité du 1-squelette

Condition sur le temps de retour

Minorer $\forall x \in]0,1[^N, \forall n \geq 1,\ P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x)$

- $\{(X^1_{n+1},\dots,X^N_{n+1}) \in C$, FV partant de $x\}$
  $\subset \{(Y^1_{n+1},\dots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $x\}$

Géométrique ergodicité du 1-squelette

Condition sur le temps de retour

Minorer $\forall x \in]0,1[^N, \forall n \geq 1,\ P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x)$

- $\{(X^1_{n+1},\ldots,X^N_{n+1}) \in C$, FV partant de $x\}$
  $\subset \{(Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C,\ (Y^i)$ partant de $x\}$
- $P((Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C,\ (Y^i)$ partant de $x) \geq$
  $P((Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C,\ (Y^i)$ partant de $0) = p > 0$

Géométrique ergodicité du 1-squelette

Condition sur le temps de retour

Minorer $\forall x \in]0,1[^N, \forall n \geq 1,\ P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x)$

- $\{(X^1_{n+1},\ldots,X^N_{n+1}) \in C$, FV partant de $x\}$
  $\subset \{(Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $x\}$
- $P((Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $x) \geq$
  $P((Y^1_{n+1},\ldots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $0) = p > 0$
- $P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x) \geq p > 0$

Géométrique ergodicité du 1-squelette

Condition sur le temps de retour
Minorer $\forall x \in]0,1[^N, \forall n \geq 1,\ P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x)$

- $\{(X^1_{n+1},\dots,X^N_{n+1}) \in C$, FV partant de $x\}$
  $\subset \{(Y^1_{n+1},\dots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $x\}$
- $P((Y^1_{n+1},\dots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $x) \geq$
  $P((Y^1_{n+1},\dots,Y^N_{n+1}) \in C$, (Y^i) partant de $0) = p > 0$
- $P(FV_{n+1} \in C | FV_n = x) \geq p > 0$

$\Longrightarrow$ τ_C borné par un temps de loi exponentielle

Convergence sur $t \in [0, T]$

Convergence sur $t \in [0, T]$

$(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ processus des mesures empiriques du FV à N particules

Convergence sur $t \in [0, T]$

$(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ processus des mesures empiriques du FV à N particules

Théorème

Si $(\mu^N(0,dx))_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la mesure aléatoire $\mu(0,dx)$, alors, $\forall T > 0$, les processus à valeur mesure $(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ convergent en loi quand $N \to \infty$ vers $(\mu_t(dx))_{t\in[0,T]}$ dans la toplogie de Skorokhod $D([0,T],\mathcal{M}_1(]a,b[))$.

Convergence sur $t \in [0, T]$

$(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ processus des mesures empiriques du FV à N particules

Théorème

Si $(\mu^N(0,dx))_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la mesure aléatoire $\mu(0,dx)$, alors, $\forall T > 0$, les processus à valeur mesure $(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ convergent en loi quand $N \to \infty$ vers $(\mu_t(dx))_{t\in[0,T]}$ dans la toplogie de Skorokhod $D([0,T],\mathcal{M}_1(]a,b[))$.

- Tension dans la topologie de Skorokhod des processus càdlàg

Convergence sur $t \in [0, T]$

$(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ processus des mesures empiriques du FV à N particules

Théorème

Si $(\mu^N(0,dx))_{N\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la mesure aléatoire $\mu(0,dx)$, alors, $\forall T > 0$, les processus à valeur mesure $(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ convergent en loi quand $N \to \infty$ vers $(\mu_t(dx))_{t\in[0,T]}$ dans la toplogie de Skorokhod $D([0,T],\mathcal{M}_1(]a,b[))$.

- Tension dans la topologie de Skorokhod des processus càdlàg
- Caractérisation de la loi limite

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $(E\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue dans $\mathcal{M}_1(D)$

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $(E\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue dans $\mathcal{M}_1(D)$
- $(\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue en tant que variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathcal{M}_1(D)$

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $(E\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue dans $\mathcal{M}_1(D)$
- $(\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue en tant que variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathcal{M}_1(D)$

$\mathcal{X}$ distribué comme une loi limite

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $(E\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue dans $\mathcal{M}_1(D)$
- $(\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue en tant que variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathcal{M}_1(D)$

$\mathcal{X}$ distribué comme une loi limite

- $(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ converge vers $(\mu_t^{(\mathcal{X})})_{t\in[0,T]}$, $\forall T > 0$

Limite hydrodynamique du processus de FV

$\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $(E\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue dans $\mathcal{M}_1(D)$
- $(\mathcal{X}^N)_{N\geq 2}$ est tendue en tant que variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathcal{M}_1(D)$

$\mathcal{X}$ distribué comme une loi limite

- $(\mu^N(t,dx))_{t\in[0,T]}$ converge vers $(\mu_t^{(\mathcal{X})})_{t\in[0,T]}$, $\forall T > 0$
- $(\mu_t^{(\mathcal{X})})_{t\in[0,T]}$ est continu ps, donc $\mu^N(t,dx)$ converge en loi vers $\mu_t^{(\mathcal{X})}$

D'autre part, $\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

D'autre part, $\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $\mathcal{X}$ et $\mu_t^{(\mathcal{X})}$ ont même loi

D'autre part, $\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $\mathcal{X}$ et $\mu_t^{(\mathcal{X})}$ ont même loi
- $\mu_t^{(\mathcal{X})}$ converge vers la DQS du processus ps (limite de Yaglom)

D'autre part, $\mathcal{X}^N$ mesure empirique stationnaire

- $\mathcal{X}$ et $\mu_t^{(\mathcal{X})}$ ont même loi
- $\mu_t^{(\mathcal{X})}$ converge vers la DQS du processus ps (limite de Yaglom)
- Conclusion: la loi de $\mathcal{X}$ est concentrée en la DQS

Théorie spectrale et DQS

$$L_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - q\frac{\partial}{\partial x} \text{ générateur de } X^\epsilon$$

Théorie spectrale et DQS

$L_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - q\frac{\partial}{\partial x}$ générateur de X^ϵ

- Spectre discret, $\lambda_\epsilon > 0$ plus petite valeur propre, $\eta_\epsilon > 0$ fonction propre associée

Théorie spectrale et DQS

$L_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - q\frac{\partial}{\partial x}$ générateur de X^ϵ

- Spectre discret, $\lambda_\epsilon > 0$ plus petite valeur propre, $\eta_\epsilon > 0$ fonction propre associée
- $d\mu(x) = e^{-2\int_1^x q(y)dy}dx$, η_ϵ normalisée dans $L^2(d\mu)$

Théorie spectrale et DQS

$L_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} - q\frac{\partial}{\partial x}$ générateur de X^ϵ

- Spectre discret, $\lambda_\epsilon > 0$ plus petite valeur propre, $\eta_\epsilon > 0$ fonction propre associée
- $d\mu(x) = e^{-2\int_1^x q(y)dy}dx$, η_ϵ normalisée dans $L^2(d\mu)$
- La DQS de X^ϵ est donnée par

$$d\nu_\epsilon(x) = \frac{\eta_\epsilon(x)d\mu(x)}{\int_\epsilon^{1/\epsilon}\eta_\epsilon(x)d\mu(x)}$$

Majoration de la DQS

$$L_\epsilon \eta_\epsilon = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon$$

Majoration de la DQS

$L_\epsilon \eta_\epsilon = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon$

- $1/2\eta_\epsilon''(x) - q(x)\eta_\epsilon(x) = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon(x)$, η_ϵ s'annule aux bords

Majoration de la DQS

$L_\epsilon \eta_\epsilon = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon$

- $1/2\eta_\epsilon''(x) - q(x)\eta_\epsilon(x) = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon(x)$, η_ϵ s'annule aux bords
- $\epsilon \mapsto \lambda_\epsilon$ est croissante

Majoration de la DQS

$L_\epsilon \eta_\epsilon = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon$

- $1/2\eta_\epsilon''(x) - q(x)\eta_\epsilon(x) = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon(x)$, η_ϵ s'annule aux bords
- $\epsilon \mapsto \lambda_\epsilon$ est croissante
- $\eta_\epsilon(x)d\mu(x)$ majorée par $f_q :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$

Majoration de la DQS

$L_\epsilon \eta_\epsilon = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon$

- $1/2\eta_\epsilon''(x) - q(x)\eta_\epsilon(x) = -\lambda_\epsilon \eta_\epsilon(x)$, η_ϵ s'annule aux bords
- $\epsilon \mapsto \lambda_\epsilon$ est croissante
- $\eta_\epsilon(x)d\mu(x)$ majorée par $f_q :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$
- Conditions de tension sur q

Chaque point d'accumulation est une distribution quasi-stationnaire

ν point d'accumulation de (ν_ϵ)

Chaque point d'accumulation est une distribution quasi-stationnaire

ν point d'accumulation de (ν_ϵ)

- $\nu_{\epsilon_k}(D) \to \nu(D)$

Chaque point d'accumulation est une distribution quasi-stationnaire

ν point d'accumulation de (ν_ϵ)

- $\nu_{\epsilon_k}(D) \to \nu(D)$
- $\nu_{\epsilon_k}(D) = \nu_{\epsilon_k,t}(D)$

Chaque point d'accumulation est une distribution quasi-stationnaire

ν point d'accumulation de (ν_ϵ)

- $\nu_{\epsilon_k}(D) \to \nu(D)$
- $\nu_{\epsilon_k}(D) = \nu_{\epsilon_k,t}(D)$
- $\nu_{\epsilon_k,t}(D) \to \nu_t(D)$?

Récapitulation et travaux à venir

Sur $]\epsilon,1/\epsilon[$:

- FV $\rightarrow \mathcal{X}^N \rightarrow \nu_\epsilon$

Récapitulation et travaux à venir

Sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$:

- FV $\rightarrow \mathcal{X}^N \rightarrow \nu_\epsilon$

Sur $]0, +\infty[$:

- $\nu_\epsilon \rightarrow \nu$

Récapitulation et travaux à venir

Sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$:

- FV $\rightarrow \mathcal{X}^N \rightarrow \nu_\epsilon$

Sur $]0, +\infty[$:

- $\nu_\epsilon \rightarrow \nu$

A suivre...

- Vitesses de convergence

Récapitulation et travaux à venir

Sur $]\epsilon,1/\epsilon[$:

- FV $\rightarrow \mathcal{X}^N \rightarrow \nu_\epsilon$

Sur $]0,+\infty[$:

- $\nu_\epsilon \rightarrow \nu$

A suivre...

- Vitesses de convergence
- Processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Récapitulation et travaux à venir

Sur $]\epsilon, 1/\epsilon[$:

- FV $\rightarrow \mathcal{X}^N \rightarrow \nu_\epsilon$

Sur $]0, +\infty[$:

- $\nu_\epsilon \rightarrow \nu$

A suivre...

- Vitesses de convergence
- Processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$
- Autres processus