

# Un modèle intégro-différentiel en dynamique adaptative.

May 2, 2007

# Table des matières

- 1 Dynamique adaptative, généralités
  - Notions de phénotype et de fitness
  - Dynamique adaptative.
- 2 Un modèle intégro-différentiel.
  - Le modèle.
  - Résultats numériques.
- 3 Etude asymptotique.
  - Un résultat de convergence.
  - Convergence vers des ESS-CSS.

# Dynamique adaptative, généralités



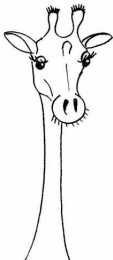
# Phénotype

## Definition

On appelle trait phénotypique d'une espèce donnée une caractéristique d'origine génétique particulière, mesurable chez chaque individu de cette espèce.

## Exemple :

*Longueur du cou d'une girafe, épaisseur du pelage d'un chat, longueur des ailes d'une mouche...*



# population structurée en trait phénotypique

## Exemple :

- $\{(x_1, \rho_1), (x_2, \rho_2)\}$  deux "sous"-espèces, de traits  $x_1$  et  $x_2$ .
- $g(x)$  densité de la population suivant  $x$ .

# Fitness

## Definition

On appelle fitness le taux d'accroissement marginal d'une espèce : (taux de naissance)-(taux de mort). Cette fitness dépend généralement du trait phénotypique de cette espèce et de la population résidente.

## Exemple :

- $s_{\{(x_1, \rho_1), (x_2, \rho_2)\}}(y)$ ,
- $s_g(x)$ .

## Exemple de fitness : modèle logistique.

$$s(x) = \{\text{accroissement sans compétition}\} - \{\text{compétition}\}$$

Exemple :

- $s_{\{(x_1, \rho_1), (x_2, \rho_2)\}}(y) = a(x) - b(y - x_1)\rho_1 - b(y - x_2)\rho_2$
- $s_f(y) = a(y) - b *_y f(y)$



# Dynamique adaptative.

## Deux échelles de temps

On considère que le temps d'évolution phénotypique est beaucoup plus grand que le temps "écologique". Les populations sont donc tout temps en "équilibre" écologique. Il faut donc s'assurer que cet équilibre est bien défini.

# Hypothèses techniques.

On supposera donc que si l'on considère  $N$  espèces de phénotypes donnés  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$ , alors les populations correspondantes  $\rho_1, \dots, \rho_N$  vont converger vers un unique équilibre  $\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N$ .

## Exemple :

*Dans le cas logistique, cela impose les hypothèses :*

- la matrice  $(b(\bar{x}_i - \bar{x}_j))_{ij}$  est inversible, alors  $(\bar{\rho}_i)_i = (b(\bar{x}_i - \bar{x}_j))_{ij}^{-1} (a(\bar{x}_i))_i$ ,
- $\forall i, j, b(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \geq 0$ , et  $\forall i, b(0) > \sum_{j \neq i} b(\bar{x}_i - \bar{x}_j)$

# Beginner's guide, Odo Dieckmann.

On considère une population d'un seul trait  $\bar{x}$ , et on étudie son comportement. L'équilibre écologique impose  $s_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ .

- Si  $\partial_x s_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0$ , le trait de la population évolue vers l'environnement plus favorable.
- Si  $\partial_x s_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$ , que se passe-t-il ? Y a-t-il stabilité ? Dans quel sens ?

# Beginner's guide, Odo Dieckmann (bis).

Cas  $\partial_x s \neq 0$  :

- **ESS** :  $\partial_{xx}^2 s_{\bar{x}}(\bar{x}) < 0$ , aucun mutant ne pourra envahir.
- **CSS** :  $\partial_x (s_{\bar{x}}(\bar{x})) < 0$ , une espèce de trait  $x$  proche de  $\bar{x}$  évoluera vers  $\bar{x}$ .

# Extension multi-espèces.

On considère une population de  $N$  espèces de traits  $(\bar{x}_i)_i$ , et on étudie son comportement.

- Si  $\partial_x s_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0$ , le trait de la population évolue vers l'environnement plus favorable.
- Si  $\partial_x s_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0$ , que se passe-t-il ? Y a-t-il stabilité ? Dans quel sens ?

# Extension multi-espèces.

Cas  $\partial_x s \neq 0$  :

- **ESS** :  $\partial_{xx}^2 s_{\bar{x}}(\bar{x}) < 0$ , aucun mutant ne pourra envahir.
- **CSS** :  $\partial_x (s_{\bar{x}}(\bar{x})) < 0$ , une espèce de trait  $x$  proche de  $\bar{x}$  évoluera vers  $\bar{x}$ .

# Un modèle intégro-différentiel.



# Le modèle.

# Modèle.

$$\begin{aligned}\partial_t g(t, x) &= (a(x) - \int b(x - y)g(y)) g(t, x)dy, \\ g(t = 0, x) &= g^0(x) > 0.\end{aligned}$$

où  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}$

# Méthode numérique.

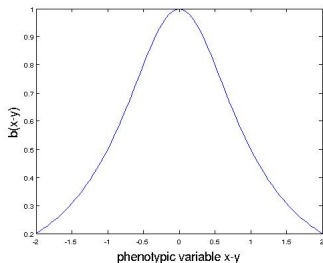
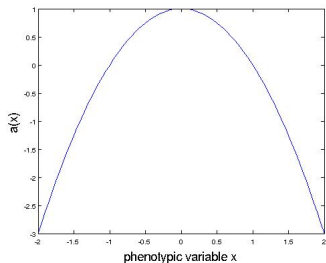
- Calcul de  $b * g$  par méthode spectrale,
- Méthode de Runge-Kutta pour l'itération en temps.

# Résultats numériques.

# Premier exemple.

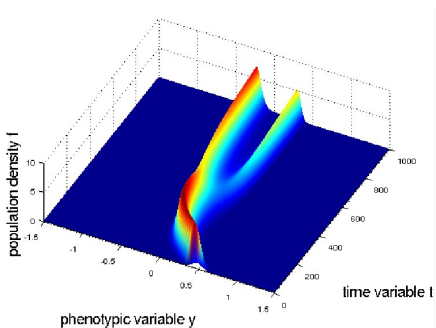
Exemple :

$$a(x) := A - x^2$$
$$b(x - y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}$$



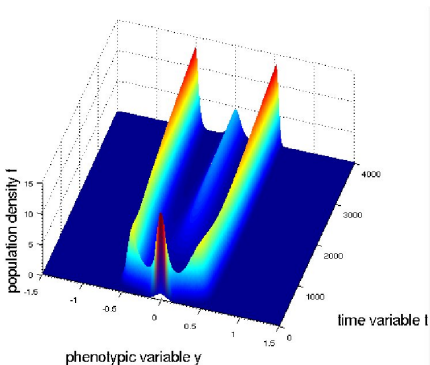
# évolution vers deux masses de Dirac

$$A = 1.5$$



# évolution vers trois masses de Dirac

$A = 2.5$



## Deuxième exemple.

Exemple :

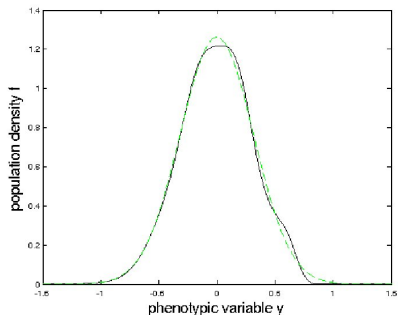
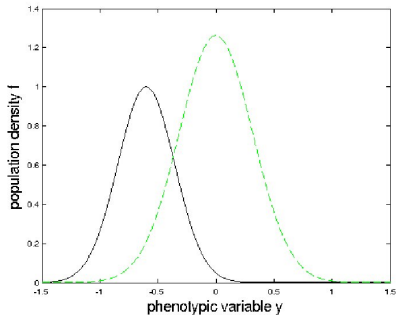
$$a(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_1+T_2)}} e^{-\frac{x^2}{2(T_1+T_2)}}$$

$$b(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T_1}} e^{-\frac{x^2}{2T_1}}$$



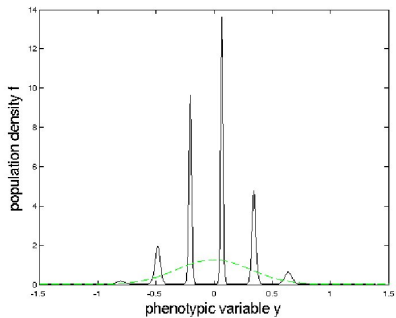
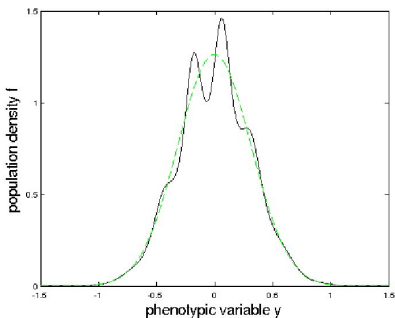
# évolution vers une somme de masses de Dirac(1)

$t = 0$ ,  $t = 500$



# évolution vers une somme de masses de Dirac(2)

$t = 25000, t = 50000$



# Etude asymptotique.

Un résultat de convergence.

$f_\varepsilon$ 

$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, \cdot) = ?$  : On ne sait pas faire.

On cherche donc à montrer une convergence lorsque l'on  
"comprime" le temps :

$$f_\varepsilon(t, x) := g\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right),$$

$f_\varepsilon$ 

$f_\varepsilon$  vérifie :

$$\partial_t f_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} (a(x) - b *_x f_\varepsilon(t, x)) f_\varepsilon(t, x),$$

et :

$$f_\varepsilon(t, x) = f^0(x) e^{\frac{1}{\varepsilon} R_\varepsilon(t, x)},$$

$$\text{où } R_\varepsilon(t, x) := \int_0^t a(x) - b *_x f_\varepsilon(s, x) ds = \int_0^t s_{f_\varepsilon}(s, x) ds.$$

# Un résultat de limite asymptotique

## Propriété

*A extraction près, il existe une mesure  $f$  telle que :*

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad L^\infty(\omega^*]0, T[, \sigma(M^1, C_b)(\mathbb{R})), \quad \forall T > 0.$$

*Et :*

$$R_\varepsilon \rightarrow R \quad \text{uniformément,}$$

$$\text{où } R(t, x) = \int_0^t a(x) - b *_{x} f(s, x) ds = \int_0^t s_f(s, x) ds.$$

# propriétés de $R$ et $f$ .

## Propriété

- $R \leq 0$ ,
- $\text{supp}(f) \subset \{(t, x); R(t, x) = 0\}$
- $\{x; R(t, x) = 0\} \neq \emptyset, \quad \forall t > 0$



# Convergence vers des ESS-CSS.

# Etude d'un ESS.

Soit  $(\bar{x}_i)_i$  un ESS,  $(\bar{\rho}_i)_i$  les populations correspondantes, et  $\bar{f} := \sum_i \rho_i \delta_{\bar{x}_i}$ . Le fitness  $s_{\bar{f}}$  vérifie :

- $\partial_{xx}^2 s_{\bar{f}}(x) < -C < 0$  si  $x$  proche d'un  $\bar{x}_i$
- $s_{\bar{f}}(x) < -\tilde{C} < 0$  si  $x$  n'est pas proche d'un  $\bar{x}_i$

# Cas d'une fonction proche de $\bar{f}$ .

Si on sait que  $f(t)$  est assez "proche" de  $\bar{f}$  pour tout temps, ces deux propriétés seront conservées, et pour tout  $t$ ,

- $\partial_{xx}^2 s_{f(t)}(x) < -\frac{C}{2} < 0$  si  $x$  proche d'un  $\bar{x}_i$ ,
- $s_{f(t)}(x) < -\frac{\tilde{C}}{2} < 0$  si  $x$  n'est pas proche d'un  $\bar{x}_i$ .

# Cas d'une fonction proche de $\bar{f}$ .

Cela sera encore vrai en intégrant  $s_f$  entre 0 et  $t$ , donc vrai pour  $R$ . Cela associé à la proposition précédente donne directement que  $f$  est une somme de  $N$  masses de Dirac proches des  $\bar{x}_i$  :

$$f(t) = \sum_i \rho_i(t) \delta_{x_i(t)}$$

Question : A-t-on  $f = \bar{f}$  ?

# régularité des $x_i$ et des $\rho_i$ .

La régularité des  $x_i$  et des  $\rho_i$  pose des problèmes, qui peuvent être résolus. On montre successivement :

- Les  $x_i(\cdot)$  sont Hölder  $\frac{1}{2}$ ,
- Les  $x_i(\cdot)$  sont Lipschitz,
- $f$  vérifie :  $\forall i, \quad s_{f(t)}(x_i(t)) = 0$ ,
- Les  $\rho_i(\cdot)$  sont Lipschitz,

EDO vérifiée par les  $x_i$ .

Enfin, on montre que les  $x_i$  sont solution d'une EDO :

$$\forall i, \quad x_i'(t) = \frac{\partial_x s(t, x_i(t))}{-\partial_{xx}^2 R(t, x_i(t))}.$$

Cette équation est proche de l'EDO canonique de dynamique adaptative  $x_i'(t) = \partial_x s(t, x_i(t))$ , et on obtient ainsi le résultat.

# Le résultat.

## Propriété

Si :

- $\bar{f}$  est une ESS-CSS,
- $f(t)$  est proche de  $\bar{f}$  pour tout  $t$ .

Alors  $f = \bar{f}$ .

... Reste à définir ce que j'appelle "proche" ...

Pour que le résultat ci-dessus est vrai pour des notions assez faibles de "proche".

Ce qui va dicter notre choix est donc plutôt notre capacité à montrer que cette propriété d'être "proche" se conserve avec le temps.



# Définition

## définition

On dit que  $g^0$  est proche de  $\bar{f} = \sum_i \rho_i \delta_{\bar{x}_i}$  si :

$$\begin{aligned} \text{supp}(g^0) &= \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N\} + B(0, \varepsilon), \\ \left| \int_{\{x_j\} + B(0, \varepsilon)} g^0 - \bar{\rho}_i \right| &\text{ petit.} \end{aligned}$$

Si les hypothèses de l'“équilibre écologique” sont vérifiées, alors cette propriété est alors vraie pour  $g(t, \cdot)$  en tout temps, et pour  $f(t)$  en passant à la limite.

# Conclusion

Cette étude, qui reste à vérifier et améliorer semble montrer la pertinence des notions combinées de ESS-CSS dans le cadre du modèle intégro-différentiel sans mutations "basique" que nous avons établi.