Exercice corrigé Probabilité 1 - L1 MMIA.

Enoncé

A. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, r]\!]$. Montrer que

$$\binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k} = \binom{r}{k}.$$

En déduire que :

$$\binom{r-1}{k-1} + 2\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}.$$

B. Soient $b \in \mathbb{N}^*$ boules indistinguables et $k \in [\![1, b]\!]$. Dénombrer le nombre de façons de répartir ces b boules en k groupes distinguables (les groupes sont supposés numérotés : groupe 1, groupe 2, etc.) chaque groupe ayant au moins une boule. (indication : on utilisera $k-1$ séparateurs).

C. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges ($b < r$). Les boules blanches sont indistinguables entre elles et de même pour les boules rouges. On les tire toutes une à une sans remise et on les range par ordre de tirage. On appelle *séquence* toute suite ininterrompue de boules de la même couleur. Eventuellement, une séquence peut être réduite à une seule boule. On note NB et NR le nombre de séquences de boules blanches et de boules rouges.

1. Donner l'ensemble des possibles Ω et son cardinal.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour NB ? Pour un nombre de séquences $NB = k$ fixé, quelles sont les valeurs possibles de NR ?

3. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (NB, NR). (indication : on utilisera les résultats de la question **B**)

4. Déterminer la loi de NB (indication : on utilisera les résultats de la question **A**).

D. Application : Au loto, on tire six numéros gagnants parmi les nombres de 1 à 49. Quelle est la probabilité pour que parmi les numéros gagnants (et sans tenir compte des tirages), il n'y en ait pas deux consécutifs ?

Corrigé

A. C'est également un calcul fait en TD :

$$\begin{aligned} C_{r-1}^{k-1} + C_{r-1}^{k} &= \frac{(r-1)!}{(k-1)!(r-k-1)!}\left(\frac{1}{r-k} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{(r-1)!}{(k-1)!(r-k-1)!} \times \frac{r}{(r-k)k} = \frac{r!}{k!(r-k)!} = C_r^k. \end{aligned}$$

On en déduit $C_{r-1}^{k-1}+2C_{r-1}^{k}+C_{r-1}^{k+1} = \left(C_{r-1}^{k-1} + C_{r-1}^{k}\right)+\left(C_{r-1}^{k} + C_{r-1}^{k+1}\right) = C_r^k+C_r^{k+1} = C_{r+1}^{k+1}$.
B. Un exercice similaire a été traité en TD (avec les tableaux d'écoles). Sachant que chaque groupe contient une boule, il nous reste $b-k$ boules à répartir entre les k groupes. Chaque possibilité de répartition correspond à une liste de $(b-k)+(k-1) = b-1$ éléments où l'on place les $b-k$ boules (indistinguables) restant à répartir et $k-1$ séparateurs (indistinguables) délimitant les k groupes. Ceci fait C_{b-1}^{k-1} possibilités.

C. 1. Ω est l'ensemble des listes de $b+r$ éléments correspondant aux tirages successifs, à chaque tirage étant associé une couleur (blanche ou rouge). Le nombre de séquences de couleurs différentes correspond au nombre de façons de placer les b boules blanches parmi les tirages. Donc : $\mathrm{card}(\Omega) = C_{b+r}^{b}$.
2. NB varie entre 1 (toutes les boules blanches sont tirées à la suite) et b (on tire une boule rouge après chaque boule blanche). Pour un nombre de séquences $NB = k$ fixé, NR peut prendre les valeurs $k-1$ (les premières et dernières séquences sont blanches), k (la première séquence est blanche et la dernière rouge ou l'inverse), $k+1$ (la première et la dernière séquences sont rouges). (Remarquons que si $NB = 1$, alors NR ne peut prendre que les valeurs 1 ou 2).
3. Par la question **B**, il y a C_{b-1}^{k-1} possibilités de répartir les b boules blanches en k groupes et C_{r-1}^{k-2} possibilités de répartir les r boules rouges en $k-1$ groupes. Donc :

$$\mathbb{P}\left((NB, NR) = (k, k-1)\right) = \frac{C_{b-1}^{k-1}C_{r-1}^{k-2}}{C_{b+r}^{b}}.$$

De même :

$$\mathbb{P}\left((NB, NR) = (k, k)\right) = 2\frac{C_{b-1}^{k-1}C_{r-1}^{k-1}}{C_{b+r}^{b}}, \quad \mathbb{P}\left((NB, NR) = (k, k+1)\right) = \frac{C_{b-1}^{k-1}C_{r-1}^{k}}{C_{b+r}^{b}}.$$

(le facteur 2 vient du fait que pour deux répartitions de boules blanches et rouges données, on peut agencer les groupes de façon à commencer par une séquence de boules blanches ou une séquence de boules rouges).
4. On déduit des résultats précédents :

$$\mathbb{P}\left(NB = k\right) = \frac{C_{b-1}^{k-1}\left(C_{r-1}^{k-2} + 2C_{r-1}^{k-1} + C_{r-1}^{k}\right)}{C_{b+r}^{b}} = \frac{C_{b-1}^{k-1}C_r^k}{C_{b+r}^{b}}.$$

D. Les numéros tirés sont colorés en blanc, les numéros non tirés en rouge. La probabilité pour qu'il n'y ait pas de numéros consécutifs parmi les numéros gagnants est la probabilité qu'il y ait 6 séquences de numéros colorés en blanc, soit, par la question **B.4** ($b = 6$, $r = 43$, $k = 6$) :

$$\mathbb{P}\left(NB = 6\right) = \frac{C_5^5 C_{43}^6}{C_{49}^6} = \frac{(43!)^2}{37!49!} \simeq 43,6\%$$

(l'application numérique n'était pas demandée bien sûr)
Conclusion : si vous jouez au Loto et que vous avez un générateur de grilles, vous pouvez vous restreindre à celles qui comportent des chiffres consécutifs pour augmenter (de façon minime) vos chances !!!!