Problème : calcul des intégrales eulériennes

Tran Viet Chi

1. On définit la fonction gamma par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt$$

   (a) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que l'on peut dériver sous le signe somme. Exprimer les dérivées successives ; on doit trouver :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \exp(-t) \ln^k(t)\, t^{x-1} dt$$

   (b) Montrer que : $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier, montrer que pour un entier n, $\Gamma(n+1) = n!$

2. On définit maintenant la fonction beta pour x et y strictement positifs par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

   (a) Montrer que :

$$B(x,y) = B(y,x)$$
$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

   (b) Soit (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$I_{n,A}(x) = \int_0^A \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

   Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ A \to \infty}} I_{n,A}(x) = \Gamma(x)$$

   (on pourra utiliser que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f(x) = \exp(-x)$).

   En déduire que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

   (a) Montrer en utilisant que :

$$\ln n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma + o(1)$$

   (où γ est la constante d'Euler) que :

$$\forall x > 0, \frac{1}{\Gamma(x)} = x \exp(\gamma x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) \exp(-x/n)\right)$$

   (b) En déduire :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

   Puis :

$$\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

   (c) En déduire que (pour le cas particulier de l'exercice TD3 qui nous intéresse) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma(2) & = & 1 \\ \Gamma'(2) & = & 1-\gamma \\ \Gamma''(2) & = & \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} + (1-\gamma)^2 \end{array} \right.$$