Probabilité 1 - Partiel du 2 mai 2007 - L1 MMIA

Durée 2 heures, calculatrice et documents interdits, sujet de 2 pages, les 4 exercices sont sur 25 points.

Exercice 1 (Barème prévu : 5 points)

On considère la suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \left[0, 2 - \frac{1}{n}\right[$$

1. Donner A_1, A_2, $A_1 \cup]1/2, 5]$, $A_1 \triangle]1/2, 5/4]$, $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

On définit maintenant la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$B_n = \begin{cases} A_{2p} & \text{si } n = 2p \\ \left[\frac{1}{2}, 2\right[& \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

2. Représenter graphiquement B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 et B_6.
3. La suite $(B_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle croissante ou décroissante pour l'inclusion ? Que dire de la suite $(B_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Soit $N > 0$ fixé. Donner $\cup_{n\geq N} B_n$ et $\cap_{n\geq N} B_n$ (pour ce dernier ensemble, on distinguera les cas N pair et N impair).
5. En déduire $\cap_{N\geq 0} \cup_{n\geq N} B_n$ et $\cup_{N\geq 0} \cap_{n\geq N} B_n$.

Exercice 2 (Barème prévu : 8 points)

1. Soit $q \in]0, 1[$. Calculer $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i$, $\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1}$ et $\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)q^{i-2}$ (indication : penser à dériver par rapport à q)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ satisfaisant : $\forall i,\ j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left((X, Y) = (i, j)\right) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2^{i+j}} & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

où α désigne une constante réelle.
2. Déterminer α.
3. Déterminer la loi de X (indication : il s'agit d'une loi géométrique dont on déterminera le paramètre).
4. Déterminer (ou donner) $\mathbb{E}(X)$.
5. Déterminer (ou donner) $\mathrm{Var}(X)$.
6. Déterminer la loi de Y.
7. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
8. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? (on justifiera la réponse)
9. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathrm{Cov}(XY)$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 3 (Barème prévu : 4 points)

Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p > 0$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
1. Rappeler (ou calculer) $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{Y}{1+X}\right)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}\,(Y+X)$.

Exercice 4 (Barème prévu : 8 points)

A. Questions préliminaires :
1. Prouver que pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![1, m]\!]$, $nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Prouver par récurrence sur N que pour tout $N \geq n$, $\sum_{m=n}^{N} C_m^n = C_{N+1}^{n+1}$.

B. Problème :
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules, les unes après les autres, sans remise. Quel est l'ensemble des possibles Ω ? Quel est son cardinal ?
4. Soit X la variable aléatoire décrivant le nombre de tirages nécessaires pour que toutes les boules noires soient tirées. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
5. Déterminer la loi de X (indication : on calculera $\mathbb{P}(X = m)$ pour m une valeur que peut prendre X).
6. Calculer son espérance.