Probabilité 1 - L1 MMIA

Tran Viet Chi, `vtran@u-paris10.fr`, Bureau E12(G).

Exercice 1 (Pour démarrer)
1. Soient A et B deux ensembles. Rappelez les définitions de l'intersection $A \cap B$, de l'union $A \cup B$, de la différence $A \setminus B$, de la différence symétrique $A \triangle B$ et du complémentaire A^c.
2. Précisez ces différents ensembles pour $A = [0, 1]$ et $B =]1/2, 2[$.
3. Même question pour $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$.
4. Même question pour $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.
5. Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dénombrable d'ensembles. Rappelez les définitions de $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ (utilisez les quantificateurs $\exists$ et $\forall$).
6. Précisez A_1, A_2, A_3, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ pour A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) défini par $A_n = [0, 1/n]$.
7. Même question pour $A_n = [0, 1 - 1/n[$.
8. Même question pour :

$$A_n = \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 1/(2p)[& \text{si} & n = 2p,\ p \in \mathbb{N}^* \\ ]-1/(2p+1), 0] & \text{si} & n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Exercice 2 (Pour démarrer...(2))
On considère une classe d'élèves. Soient les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ l'élève a une moyenne supérieure à } 10\} \\ B &= \{ \text{ l'élève est un garçon}\} \\ C &= \{ \text{ l'élève a faim}\}. \end{aligned}$$

Exprimer à l'aide des opérations ensemblistes les événements ci-dessous :

1. l'élève a une moyenne supérieure à 10, n'est pas un garçon et n'a pas faim (A seul se produit),
2. A et C se produisent, mais pas B,
3. les trois événements se produisent,
4. L'un au moins des événements se produit,
5. Deux événements au moins se produisent,
6. Un événement au plus se produit,
7. Aucun des trois événements ne se produit,
8. Exactement deux événements se produisent,
9. Pas plus de deux événements se produisent.

Exercice 3 (Limites inf et sup d'ensembles)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On définit par $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et par $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux.

1. Ecrire les définitions de $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ à l'aide des symboles usuels $\forall$ et $\exists$.
2. En déduire que

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Donnez une formulation analogue pour $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
3. Calculez $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dans les cas suivants :
– pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n =]-\infty, a_n]$ où pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 1 + 1/(2p)$ et $a_{2p+1} = -1 - 1/(2p+1)$.
– pour $p \in \mathbb{N}$, $A_{2p} =]0, 3 + 1/(3p)[$ et $A_{2p+1} =]-1 - 1/(3p+1), 2[$.

– pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = p_n\mathbb{N}$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de p_n.

4. Montrez les relations ensemblistes suivantes :

$$\left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n^c, \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$
$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \limsup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \limsup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Exercice 4 (Mot de passe)

1. Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères ?
2. Combien existe-t-il de nombres entiers formés de 3 chiffres distincts ?
3. Combien de plaques d'immatriculation différentes contenant 4 lettres suivies de deux chiffres peut-on faire ?

Exercice 5 (Tiroir à chaussettes)

Un tiroir contient $2n \in \mathbb{N}$ chaussettes (n paires). Yoann, qui part en voyage a décidé d'emmener $2r$ chaussettes ($r \leq n$). Au moment de faire sa valise une panne d'électricité survient. Il prend donc $2r$ chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait parmi ces $2r$ chaussettes aucune paire complète ? Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi ces $2r$ chaussettes exactement k paires complètes, avec $1 \leq k \leq r$?

Exercice 6 (Jeu de Cartes)

Un jeu de 52 cartes contient 4 as. On forme au hasard 4 paquets de 13 cartes. Quelle est la probabilité que chaque paquet contienne un as ?

Exercice 7 (Tableaux noirs)

Si 10 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?

Exercice 8 (Probabilités d'intersection et d'union)

1. Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,9$ et $\mathbb{P}(B) = 0,7$. Est-il possible que $\mathbb{P}(A\cap B) = 0,6$?
2. Soient A et B deux ensembles. Exprimer $\mathbb{P}(A \cup B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Soient $(A_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ une suite d'ensembles. Montrer la formule du crible :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in[\![1,N]\!]} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} \sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in[\![1,n]\!]} A_{i_k}\right).$$

4. Si de plus, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in[\![1,n]\!]} A_{i_k}\right)$ ne dépend que de n, montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in[\![1,N]\!]} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} C_N^n \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5. Un facteur distrait distribue au hasard N lettres dans les N boîtes d'un immeuble. Quelle est la probabilité pour qu'aucun habitant de l'immeuble ne reçoive sa lettre ? Quelle est sa limite lorsque $N \to +\infty$?
6. Un coursier distribue à présent r prospectus dans ces mêmes n boîtes aux lettres ($r \geq N$), en oubliant au fur et à mesure où il les a déposés. Quelle est la probabilité pour que chaque locataire reçoive au moins un prospectus.

Exercice 9 (Escroc morpho-graphologue)

Un morpho-graphologue prétend pouvoir associer la photo d'une personne à un spécimen de son écriture. On lui présente donc n photos et n spécimens d'écriture. Bien sûr, c'est un escroc et il répond au hasard.
1. Quelle est la probabilité qu'il se trompe sur toutes les photos ?
2. Quelle est la probabilité qu'il fasse exactement k associations exactes parmi les n ?

Exercice 10 (Formules sommatoires)

Montrer les relations suivantes pour $p \in \mathbb{N}$, n, N, $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k} = C_{p+q}^n,$$
$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n, \quad nC_{n-1}^{q-1} = qC_n^q, \quad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}, \quad \sum_{k=n}^{N} C_k^n = C_{N+1}^{n+1}.$$

Exercice 11 (Utilisation de la formule de Pascal)
1. On considère n, $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq N$. Montrer la formule de Pascal :

$$\sum_{k=n}^{N} C_k^n = C_{N+1}^{n+1}.$$

2. Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules avec remise. Calculer la probabilité que le numéro de la boule numéro p soit supérieur ou égal à ceux des $p-1$ boules tirées précédemment. Calculer la limite de cette probabilité quand $n \to +\infty$.
3. Reprendre la question 2 pour des tirages sans remise.

Exercice 12 (Dauphins)
Une famille de dauphins est constituée de six femelles et de quatre mâles. On choisit au hasard dans cette famille un groupe de quatre dauphins. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de femelles du groupe.
1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 13 (Grossiste)
Un grossiste estime que la demande en tonnes de denrées périssables est une variable aléatoire X de loi

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,05$	$0,15$	$0,2$	$0,35$	$0,15$	$0,1$

1. Calculer la demande moyenne.
2. Calculer la variance de X.
3. Calculer la probabilité que la demande soit
1. inférieure ou égale à deux tonnes.
2. supérieure ou égale à une tonne et inférieure ou égale à trois tonnes.
3. strictement supérieure à deux tonnes.

4. Le stock du grossiste est de trois tonnes. Il gagne cinq mille euros par tonne vendue et perd deux mille euros par tonnes invendue. On note Y la variable aléatoire discrète représentant son bénéfice ou sa perte.
1. Exprimer Y en fonction de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 14 (Ajustement d'un paramètre)
Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,2,3,4,5\}$ définie par la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6a}(k-a)^2.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la loi ci-dessus est-elle bien une loi de probabilité ?

On rappelle les formules $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 15 (Encore...)
Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ définie par la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(X=k) = a\,k\,(8-k)$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la loi ci-dessus est-elle une loi de probabilité ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 16 (Puissances...)
Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilité, respectivement, $\frac{p}{2}$, $1-p$, $\frac{p}{2}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.
1. Déterminer selon les valeurs de k la loi de X^k.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(X^k\right)$ selon les valeurs de k.

Exercice 17 (Tirage de boules)
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire au hasard sans remise k boules ($1 \leq k < n$). On note X la variable aléatoire représentant le plus petit numéro obtenu.
1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 18 (Casino)
Au casino, Patrick décide de miser sur un même numéro jusqu'à ce qu'il gagne ou jusqu'à ce qu'il ne dispose plus d'argent à miser. A chaque tour, il mise la même somme et on suppose que le numéro sort avec probabilité p. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tours joués. On note $m \in \mathbb{N}^\star$ la mise effectuée à chaque tour et on suppose qu'il dispose d'une fortune initiale égale à Nm ($N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$).
1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.
5. On note Y la variable aléatoire prenant les valeurs 0 ou 1 définie par : $Y = 0$ si le joueur perd toute sa fortune et $Y = 1$ si le joueur sort gagnant.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 19 (Fraudeur)
Arsène décide de plus acheter sa carte orange et de voyager par les transports en commun sans ticket. On suppose qu'il effectue $2N$ voyages dans le mois et que la probabilité qu'il soit contrôlé au cours d'un voyage est p. On note X le nombre de contrôles au cours du mois.
1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.
5. La carte orange coûte m euros par mois ($m \in \mathbb{N}^\star$) et le montant d'une amende est de a euros ($a \in \mathbb{N}^\star$). Soit Y la variable aléatoire représentant l'écart entre la somme dépensée en achetant une carte orange et la somme dépensée en payant les amendes.

1. Exprimer Y en fonction de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 20 (Diffusion télévisée)
Une ville de province décide de créer deux chaînes de télévision n'émettant que le week-end : une à vocation culturelle, l'autre à vocation sportive. Une enquête a permis d'établir que 15% des foyers comptent regarder la chaîne culturelle et 85% la chaîne sportive. On s'intéresse alors à ce qui va se passer les 9 week-ends suivant la mise en service de ces deux chaînes.
1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de week-ends où un foyer regarde la chaîne culturelle ?
2. Donner son espérance et sa variance.
3. Durant ces 9 week-ends, quelle est la probabilité qu'un foyer regarde la chaîne sportive :

1. tous les samedis ?
2. au moins 6 fois ?
3. au plus deux fois ?

Exercice 21 ()
Calculer l'espérance et la variance des lois suivantes (on déterminera la (les) valeur(s) de la constante $C > 0$).
1. $\mathbb{P}(X = k) = C\dfrac{k}{n(n+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

On rappelle les formules $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. $\mathbb{P}(X = k) = C\dfrac{\theta^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer de plus la fonction génératrice de X (on calculera C en fonction du paramètre θ).

3. $\mathbb{P}(X=k) = C\dfrac{2^k}{(k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer de plus la fonction génératrice de X.
4. $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{C}{k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^\star$.
5. Dans les deux premiers cas, calculer $\mathbb{P}\{X \text{ pair}\}$. Dans le dernier cas, pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $\mathbb{E}(X^\alpha) < +\infty$?

Exercice 22 (Relation linéaire)
Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ et a et b deux nombres entiers non nuls. On pose $Y = aX + b$.
1. Calculer la fonction de répartition et la fonction génératrice de Y en fonction de celles de X.
2. On suppose de plus que $\mathrm{Var}(X) < +\infty$. Calculer $\mathrm{Var}(Y)$ en fonction de $\mathrm{Var}(X)$.
3. Application : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$, $p \in]0,1[$ et $Y = 2X + 5$.

Exercice 23 (Gâteau aux raisins)
Combien faut-il mettre de raisins secs dans un kg de pâte pour qu'en mangeant une part de gateau de 50 g on ait au moins 99% de chance de manger du raisin ?

Exercice 24 (Tirage de cartons)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ cartons numérotés de 1 à $2n$.
1. On tire au hasard un carton et on note X la variable aléatoire égale au numéro du carton tiré. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Un joueur a la possibilité d'effectuer deux tirages dans ce sac avec la stratégie suivante. Il se donne *a priori* un nombre $k \in [\![1, 2n]\!]$.
- Si le premier tirage donne un numéro au moins égal à k, il s'arrête,
- sinon, le carton tiré est remis dans le sac et il effectue un second tirage.

Soit Y la variable correspondant au numéro du carton finalement tiré. Déterminer la loi de Y en fonction de n et k. Calculer son espérance et montrer qu'elle est maximale pour $k = n+1$. Comparer les espérances de X et Y.

Exercice 25 (Une utilisation du binôme de Newton)
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules blanches et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages sans remise jusqu'à ce que toutes les boules noires soient tirées. Soit X la variable aléatoire décrivant le nombre de tirage nécessaire. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 26 (Tirages sans remise)
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs sans remise. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2, puis celle de X_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 27 (Les clés et les lunettes de Pierre-André)
Pierre-André a oublié ses clés et ses lunettes chez l'un de ses 5 amis. La probabilité qu'il ait oublié ses clés et ses lunettes chez 2 amis différents mais déterminés est 1/40, et la probabilité qu'il les ait oubliées chez une même personne (déterminée) est 1/10. Calculer la probabilité des événements suivants :
1. Pierre-André trouve les 2 objets chez des amis différents,
2. Pierre-André trouve les 2 objets chez le même ami,
3. Pierre-André trouve ses clés après ses lunettes,
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visites nécessaires pour retrouver les 2 objets. Déterminer sa loi et son espérance.

Exercice 28 (Encore des urnes)
Dans une urne contenant initialement $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs suivant la technique suivante : si on tire au premier coup la boule numéro k, alors celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k. On effectue alors le second tirage.

On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier coup, et X_2 celle égale au numéro de la boule tirée au second coup.
1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 et vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_2 = k) = 1.$$

3. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

indication : $k/(n+k) = k - n + n^2/(n+k)$. **4.** Déterminer un équivalent simple de $E(X_2)$ lorsque $n \to +\infty$. (indication : introduire une somme de Riemann).

Exercice 29 (Et encore une urne)
Une urne continue $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages successifs. Soit $p \in [\![2, n]\!]$. On note E_p l'événement "le numéro obtenu au tirage p est inférieur ou égal aux numéro des boules tirées précédemment".
1. Si les tirages sont indépendants et avec remise, montrer :

$$\mathbb{P}(E_p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}$$

et calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_p)$.
2. On suppose maintenant que les prélèvements se font sans remise. Montrer que $\mathbb{P}(E_p) = 1/p$.
3. Toujours avec des tirages sans remise, on considère les variables aléatoires suivantes. Pour n tirages X_n est la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement E_p s'est réalisé ($1 \leq p \leq n$). Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on note Y_p la variable qui vaut 1 si E_p est réalisé et 0 sinon. Quel est le lien entre X_n et les variables $Y_1, \cdots Y_n$. En déduire une expression de l'espérance de X_n.

Exercice 30 (Urne)
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. A chaque étape, on tire une boule de l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule blanche supplémentaire. On arrête les tirages lorsqu'on a obtenu la boule noire. Soit X le nombre de tirages effectués.
1. Déterminer la loi de X.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 31 (Urne)
On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant une boule rouge, une boule noire et une boule blanche, jusqu'à obtenir la boule blanche. Soit X le nombre de tirages effectués, et Y le nombre de fois que la boule rouge a été tirée.
1. Quelle est la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Quelle est la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 32 ()
Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 33 ()
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$. Comparer le résultat à $1/\mathbb{E}(X)$.

Exercice 34 (Variable Poisson)
Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la valeur de X la plus probable ? La comparer à $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 35 (Variable géométrique)
1. Soit X une variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que $\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$.
2. Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 1) = p$ avec $0 < p < 1$ et pour tout k entier positif ou nul, $\mathbb{P}(X = 1 + k | X > 1) = \mathbb{P}(X = k)$. Montrer que X suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 36 (Loi de variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \mathbb{P}(X = k-1) = \frac{2}{3} k \mathbb{P}(X = k).$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 37 (Casino Royale)
James se rend au casino et décide de jouer à la roulette toujours le même numéro jusqu'au gain, en doublant sa mise à chaque nouveau tirage. A chaque partie, ce numéro a une probabilité p de sortir ($0 \leq p \leq 1$). On note s la mise initiale du joueur, et on suppose que gagner rapporte m fois la mise. Soit N le nombre de parties jouées, et G le gain du joueur à la fin de la partie. Quelle est la loi de N ?
1. Exprimer G en fonction de N.
2. En déduire le gain moyen en fonction de p, s et m.

Exercice 38 (Utilisation des sommes de Riemann)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(u_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ la suite définie par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ u_k^n = \frac{a_n k}{n^2 + k^2} \tag{1}$$

Déterminer le réel a_n (fonction d'une somme) pour que (1) définisse une loi de probabilité.
2. Etudier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = u_k^n.$$

Calculez $E(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 39 (Utilisation des séries exponentielles)
1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2 + a^n}{n!}\right).$$

Pour quelle valeur de a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit-elle une loi de probabilité ?
2. Pour la valeur de a calculée en 1 on considère les variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(X = n\right) = \mathbb{P}\left(Y = n\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{2 + a^n}{n!}\right).$$

Calculez l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 40 (Utilisation de récurrence)
1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ des réels positifs ou nuls. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$, $A_n = \sum_{k=1}^n kp_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n p_k/k$ et $D_n = A_n \times B_n - S_n^2$. Montrer que :

$$2S_n \leq \frac{A_n}{n+1} + (n+1)B_n$$

(on pourra considérer la différence).
3. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_{n+1} = D_n + p_{n+1}\left(\frac{A_n}{n+1} + (n+1)B_n - 2S_n\right).$$

4. En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence que si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n kp_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k}{k}\right).$$

5. Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que Z admet une espérance. Montrer que la variable $1/Z$ admet aussi une espérance et que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left(Z\right)}.$$

Exercice 41 ()
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard X de loi uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$. On choisit alors Y uniformément entre 1 et X.
1. Calculer $p_n = \mathbb{P}(Y \leq n,\ X \geq n,\ X - Y \leq n)$. On pourra utiliser les événements $\{X = k =\}$ et montrer que :

$$\{Y \leq n,\ X \geq n,\ X - Y \leq n\} = \cup_{k=n}^{2n} \{k - n \leq Y \leq n,\ X = k\}.$$

2. Calculer

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx.$$

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 42 (Rangement de boules)
On répartit au hasard b boules dans c cases. On note N le nombre de cases vides. Calculez l'espérance de N.

Exercice 43 (Quelques lois usuelles : lois de Bernoulli et binômiale)
Soient $X_1, \cdots X_N$ N variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.
1. Quelles sont l'espérance et la variance de X_1 ? de X_2 ?
2. Quelle est la loi de $\sum_{k=1}^{N} X_k$? Calculez son espérance et sa variance.
3. Calculez pour a et $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k > a\right), \quad \mathbb{P}\left(1 \leq \sum_{k=1}^{8} X_k \leq b\right).$$

Exercice 44 (Quelques lois usuelles : loi de Poisson)
Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1. Calculez l'espérance et la variance de Y.
2. Calculez pour c et $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k \leq c\right), \quad \mathbb{P}\left(1 < \sum_{k=1}^{8} X_k \leq d\right)$$

Exercice 45 (Quelques lois usuelles : loi géométrique)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Donnez l'espérance et la variance de X. **2.** Quelle est la loi de $Z = \min(X, Y)$?

Exercice 46 (Loto)
1. Une urne contient b boules blanches et r boules roues. On les tire toutes une à une sans remise et on les range par ordre de tirage. On appelle *séquence* toute suite ininterrompue de boules de la même couleur. Eventuellement, une séquence peut être réduite à une seule boule. On note NB et NR le nombre de séquences de boules rouges et de boules blanches.
  1.1 Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (NB, NR).
  1.2 Déterminer la loi des variables aléatoires NB et NR.

2. Au loto, on tire six numéros gagnants parmi les nombres de 1 à 49. Quelle est la probabilité pour que parmi les numéros gagnants (et sans tenir compte des tirages), il n'y en ait pas deux consécutifs ?

Exercice 47 (Tirage de boules)
1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k).$$

2. On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). Soit X le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de X. On pourra utiliser l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 48 (Commerçant)
Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X de loi

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}.$$

où p est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.
1. Calculer la demande moyenne.
2. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.
3. Connaissant son stock s, calculer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 49 (Concierge)
Un concierge a n clefs, chacune n'ouvrant qu'une seule porte. Il les essaie l'une après l'autre en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 50 (Enfants)
1. Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?
2. Un collègue a également deux enfants, dont le plus âgé est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon.

Exercice 51 (Oeufs de tortues)
Le nombre X d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un œuf a la probabilité p d'arriver à éclosion. Quelle est la loi du nombre Y de bébés tortues à chaque ponte ?

Exercice 52 (Tirage)
On sait que 5% des hommes et $0,25\%$ des femmes sont daltoniens. On choisit un daltonien au hasard. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Exercice 53 (Gates of fortune)
Un jeu télévisé américain se déroule comme suit. Sur le plateau sont disposées trois portes. Cachés derrière l'une de ces portes se trouvent de somptueux cadeaux. A l'issue du jeu, le gagnant doit choisir une des portes. Une fois ce choix accompli, le présentateur ouvre une porte différente derrière laquelle il n'y a pas de cadeaux (le présentateur connaît la porte gagnante). Le candidat a alors deux possibilités : soit il maintient son choix, soit il change d'avis et reporte son choix sur la porte non ouverte restante. Quelle serait votre stratégie ?

Exercice 54 (Rhume)
On suppose que le nombre de rhume attrapés en un an par un individu est une variable aléatoire de Poisson de paramètre 5. Un médicament préventif réduit ce paramètre de 3 lorsqu'il fait effet. La probabilité pour que ce médicament fasse effet est 0,75. Stéphanie essaie ce médicament et attrape 2 rhumes dans l'année. Quelle est la probabilité pour que le médicament ait été efficace sur Stéphanie ?

Exercice 55 (Répétition de jeux indépendants)
Sébastien et Aldéric jouent une suite de parties indépendantes. Lors de chacune d'elles, ils ont respectivement les probabilités p et $q = 1 - p$ de gagner. Le vainqueur final est celui des deux joueurs qui le premier obtient deux victoires de plus que son adversaire. Quelle est la probabilité pour qu'Aldéric soit le vainqueur final ?

Exercice 56 (Couple de variables aléatoires)
Soient X et Y les variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	-1	0	2	5
0	0,10	0,05	0,15	0,05
1	0,15	0,20	0,25	0,05

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité bivariée.
2. Quelle est la loi marginale de X ?
3. Quelle est la loi marginale de Y ?
4. Calculez $\mathbb{P}\,(Y \geq 0 \,|\, X = 1)$.
5. Calculez les espérances de X, Y, leurs variances, et la covariance de X et Y.

$X \setminus Y$	-3	-1	1
0	$c/8$	$c/8$	0
1	$c/4$	$3c/8$	$c/8$

Exercice 57 (Couple de variables aléatoires 2)
Soient X et Y les variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :
1. Calculez c pour que le tableau précédent définisse bien une loi de probabilité.
2. Donnez les lois marginales de X et Y.
3. Calculez les espérances et variances de X et de Y.
4. Calculez la covariance de X et Y.
5. Soient $U = 3X - Y$ et $V = 4X + Y$. Calculez $\operatorname{cov}(U, V)$.
6. Soit $W = 100V$. Calculez $\mathbb{P}(W > 240)$.

Exercice 58 (Couple de variables aléatoires)
Soient Z et X deux variables aléatoires entières telles que :
- Z est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,
- La loi de X sachant que $Z = k$ est la loi uniforme sur $[\![0, k]\!]$.

1. Déterminer les lois de X et de (X, Z) en fonction des $\mathbb{P}(Z = k)$.
2. Calculer l'espérance de X en fonction de $\mathbb{E}(Z)$.
3. Comparer les lois de X et de $Z - X$.

Exercice 59 (Urne)
On considère une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages successifs avec remise. On définit la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :
- X_1 est la variable aléatoire égale à 1 presque sûrement.
- Pour $p \geq 2$, $X_p = 1$ si le numéro obtenu au tirage p n'a pas été obtenu lors d'un précédent tirage, et $X_p = 0$ dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que la loi de X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre :
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}.$$
3. Montrer que :
$$\forall i < j,\ \mathbb{P}(X_i = 1,\ X_j = 1) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}.$$
4. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.
5. Calculer la covariance de (X_i, X_j). Conclusion ?
6. Soit $N \geq 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance.
7. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(Z_N)$ lorsque $n \to +\infty$. Etait-ce prévisible ?

Exercice 60 (Tirages simultanés dans deux urnes)
On dispose de deux urnes contenant l'une et l'autre r boules rouges et b boules blanches. On tire simultanément les boules de chaque urne, sans remise. On dit qu'il y a *rencontre* au tirage n si les boules tirées sont de même couleur. On note R le nombre de rencontres. Déterminer l'espérance de R.

Exercice 61 (Jeu de dés)
1. On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 sachant que les deux résultats sont différents ?

Exercice 62 (Lancé de deux dés)
On jette deux dés.
1. Calculez la probabilité pour que la somme obtenue soit au moins égale à 10.
2. Calculez la probabilité pour que la somme obtenue soit au moins égale à 10, sachant que l'un des dés a donné 5.

Exercice 63 (Tirage de deux cartes)
On tire successivement deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que la deuxième soit noire ?

Exercice 64 (Population en 3 classes)
Une compagnie d'assurance répartit ses clients en 3 classes : "bas risque", "risque moyen", "haut risque". Pour chacune de ces catégories, la probabilité d'avoir au moins un accident au cours de l'année est 0,05, 0,15 et 0,30. Les parts de ces classes dans la population sont $p_1 = 20\%$, $p_2 = 50\%$, $p_3 = 30\%$.
1. Quelle est l'espérance du nombre de clients ayant un accident ou plus au cours d'une année donnée ?
2. Si un client n'a pas eu d'accident une année donnée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?

On procède à un tirage avec remise de n individus et on note X, Y, Z le nombre d'individus du premier type, du second type, du troisième type dans l'échantillon tiré.
1. Déterminer la loi de (X, Y). Qu'en est-il de Z ?
2. Quelle est la loi de X ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x)$.
4. Déterminer les espérances et les variances de $U = X + Y$.

Exercice 65 (Répétitions jusqu'au succès)
On tire à pile ou face avec une pièce jusqu'à obtenir m fois *pile*, m étant fixé à l'avance. La pièce est truquée et la probabilité d'avoir pile est $p \in]0, 1[$. On note X le nombre d'essais nécessaires. Déterminer la loi de probabilité de X. Quelle est cette loi dans le cas $m = 1$?

Exercice 66 (Test entaché d'erreur)
Dans un élevage, on a décelé une maladie. La probabilité pour qu'un animal soit atteint par cette maladie est 2/10. Sachant qu'un lapin est atteint par la maladie, la probabilité qu'il présente une réaction positive à un test fixé par le vétérinaire est 9/10. S'il n'est pas malade, la probabilité pour qu'il présente une réaction négative est 95/100.
1. Calculez la probabilité pour qu'un lapin tiré au hasard dans l'élevage présente une réaction positive au test.
2. En déduire la probabilité pour qu'un lapin, tiré au hasard dans l'élevage, soit atteint de la maladie sachant qu'il présente une réaction positive au test.

Exercice 67 (Election)
Lors d'une élection, une proportion p des électeurs vote pour Nicolas et une proportion $(1 - p)$ vote pour Ségolène. Des électeurs ont été interrogés lors d'un sondage précédant les élections. La probabilité qu'un électeur voulant voter pour Nicolas réponde honnêtement est 90% et la probabilité qu'un électeur voulant voter pour Ségolène réponde honnêtement est 95%.
1. Calculez en fonction de p la probabilité q pour qu'un électeur pris au hasard réponde qu'il va voter pour Nicolas.
2. En déduire en fonction de p la probabilité r pour qu'un électeur, pris au hasard, vote réellement pour Nicolas, sachant qu'il a répondu qu'il vote pour Nicolas.
3. Calculez q et r lorsque $p = 5\%$ et $p = 45\%$.

Exercice 68 (Fonctions génératrices de lois usuelles)
Calculez les fonctions génératrices des lois de Bernoulli et de Poisson.

Exercice 69 (Avec des matrices)
Soient α et β deux réels de l'intervalle $]0, 1[$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1-\alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de M^n.
3. Calculez M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **4.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0, 1[$. Les probabilités conditionnelles $a = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 1)$ et $b = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 0)$ ne dépendent pas de n et sont des éléments de $]0, 1[$. On pose :

$$D_n = \begin{pmatrix} p_n \\ 1-p_n \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

Exprimer D_n en fonction de D_0 et T, puis exprimer p_n en fonction de n, a et b. **5.** Calculez $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 70 (Série géométrique)
Deux amies, Mylène et Magali, jouent aux dés. Chacune jette une paire de dés (non truqués) et recommence jusqu'à ce que la différence des points de ses deux dés soit égale à quatre. Les deux amies jouent simultanément et la partie s'arrête dès que chacune a obtenu une différente égale à 4. L'unité de temps est de 10 secondes. On suppose que les deux amies jettent les dés toutes les unités de temps, de façon indépendante, l'un pouvant éventuellement continuer seul. On note Y le nombre d'unités de temps que dure la partie. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 71 ()
On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, \cdots, 9\}$.
1. Calculez l'espérance et la variance de X.
2. Majorez la quantité $P(|X-5|>4)$ grace à l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Que vaut en fait cette probabilité ? Commentez.

Exercice 72 (A l'usine)
On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.
1. Majorez la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?
2. On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Majorez la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 pièces ?

Exercice 73 (Jeu de dé)
On considère un dé à 6 faces pour lequel la probabilité d'apparition du 5 à chaque lancer est $p \in]0,1[$. On lance le dé $k \in \mathbb{N}^*$ fois et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le numéro 5 est apparu.

1. Pour quelles valeurs de k la probabilité
$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{k} = \frac{1}{6}\right)$$
est-elle non nulle ?
2. Etudier les variations de la fonction
$$f\ :\ x \in]0,1[\mapsto \left(\frac{6}{5}\right)^5 x(1-x)^5.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k = 6n$. Calculez $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.
4. On suppose que $p \neq 1/6$.
4.1. Montrer que :
$$a_n \leq \mathbb{P}\left(|X - 6np| \geq n|1-6p|\right).$$
4.2. En déduire un majorant de na_n (indépendant de n) en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.
4.3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$.

5. Nous allons étudier la série $\sum a_n$ en utilisant les résultats précédents :
5.1. Déduire de la question précédente que :
$$\exists L \in]0,1[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L.$$
5.2. Montrer que :
$$\exists A > 0,\ \forall n \geq n_0,\ a_n \leq AL^n.$$
5.3. Montrer que la série de terme général a_n converge.

Exercice 74 ()
Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est définie sur $[-1,1]$ et donnée par
$$G_X(t) = \frac{t^2}{2-t^2}.$$
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Mêmes questions pour la variable $Y = X/2$ (on calculera sa fonction génératrice G_Y).
4. Répondre aux questions (a) et (b) pour la fonction génératrice
$$G_X(t) = \frac{e^{t\ln 2} - 1}{t}$$
.

Exercice 75 (Lois de Poisson et de Pascal)
Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, puis d'une loi de Pascal de paramètres $r \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$. On pourra utiliser pour la loi de Pascal l'égalité

$$\sum_{k \geq j} k(k-1)\dots(k-j+1)t^{k-j} = \frac{j!}{(1-t)^{j+1}}.$$

Rappel : X suit une loi de Pascal si pour $k \geq r$: $\mathbb{P}(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

Exercice 76 (Loi géométrique)
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$. On pose $Y = \frac{X}{2}\mathbb{1}_{\{X \text{ pair}\}}$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer sa fonction génératrice G_Y.
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Mêmes questions si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que

$$\cosh(\lambda) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 77 (Calcul de moments)
Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est sa fonction génératrice G_X ? Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note P_k le polynôme défini par

$$P_k(x) = k(k-1)\dots(x-k+1).$$

Calculer $\mathbb{E}(P_k(x))$. En déduire $\mathbb{E}\left(X^3\right)$.

Exercice 78 (Boules rouges et vertes)
Esterinna et Rosanna ayant trouvé une urne contenant v boules vertes, r boules rouges et b boules blanches, décident de jouer au jeu suivant : Esterinna effectue des tirages avec remise dans l'urne, jusqu'à obtenir une boule rouge ou une boule verte. Si la dernière boule est rouge, c'est Esterinna qui gagne, si elle est verte, c'est Rosanna qui l'emporte.

1. Quelle est la probabilité que Rosanna gagne au $i^{\text{ième}}$ tirage ?
2. Soit X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X ?
3. Calculer la fonction génératrice G_X de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 79 (Pile ou face)
Ali et Medhi lassés du jeu de pile ou face décident d'en changer les règles. Ils vont lancer n fois la même pièce ($n \in \mathbb{N}$), et le premier va parier sur l'apparition de pile un nombre pair de fois parmi les n lancers, et l'autre sur l'apparition de pile un nombre impair de fois. On note p la probabilité d'obtenir pile ($0 < p < 1$), et p_n la probabilité d'obtenir en n lancers un nombre pair de piles (on convient que 0 est pair).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}.
2. En déduire la valeur de $H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$.
3. Calculer p_n.

Exercice 80 (Saut en hauteur)
Javier tente, au saut en hauteur, de franchir successivement les hauteurs $1, 2, 3, \dots, n$, etc ...On suppose les sauts indépendants et on suppose que la probabilité de succès à la hauteur n est égale à $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). On note X la dernière hauteur franchie.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Donner l'expression de la fonction génératrice de X.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
6. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 81 (Cinema)
Dans un cinéma où on projette le troisième épisode de *la guerre des planètes*, il arrive X personnes souhaitant voir le film. On suppose que X est une variable aléatoire discrète de loi géométrique de

paramètre $p \in]0,1[$. La capacité de la salle ou on projette le film n'est que de n places. On note Y le nombre de personnes insatisfaites, c'est-à-dire ne pouvant pas rentrer dans la salle.
1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la fonction génératrice de Y.
3. Calculer le nombre moyen de personnes insatisfaites.

Exercice 82 ()
Soit X une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$, et Y une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note $p_k(n,p) = \mathbb{P}(X = k)$. Montrer que $p_k(n,p) \to \mathbb{P}(Y = k)$ quand $n \to +\infty$ et $p \to 0$ de telle sorte que $np \to \lambda$.

Exercice 83 (Estimateurs d'une proportion et d'une variance)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et } \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = p$ et que $\lim_{n\to+\infty} \bar{X}_n = p$ p.s.
2. Quelle est la variance σ^2 d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(1,p)$?
3. On se propose d'approcher σ^2 par la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $U_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$.

1. Calculez $\mathbb{E}(U_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$ (précisez le sens de cette limite).
2. Proposez une autre approximation de σ^2, V_n qui vérifierait $\mathbb{E}(V_n) = \sigma^2$.

Exercice 84 (Intervalles de confiance)
Dans une population de $N = 30\,000\,000$ individus, la proportion d'individus présentant de plus de 1 m 77 est $p = 0,4$. On prélève un échantillon de taille $n = 1\,600$ et on note X_n le nombre d'individus de l'échantillon de plus de 1 m 77.
1. Quelle est la limite $\lim_{n\to+\infty} X_n/n$?
2. Minorez la probabilité des événements :

$$\{0.30 \leq X_n/n \leq 0.50\}, \quad \{0.35 \leq X_n/n \leq 0.45\}, \quad \{0.38 \leq X_n/n \leq 0.42\}$$

3. Calculez la longueur minimale L de la fourchette telle que :

$$\mathbb{P}\left(0,40 - \frac{L}{2} \leq \frac{X_n}{n} \leq 0.40 + \frac{L}{2}\right) \geq 0.95$$

Exercice 85 (Hypoerglycémiques)
On veut obtenir une estimation de la proportion d'hyperglycémiques parmi des personnes âgées de plus de 60 ans. On choisit au hasard $n = 170$ personnes dans cette population et on constate quŠil y a $X_n = 31$ hyperglycémiques.
1. Donnez une approximation Y_n de la proportion d'hyperglycémiques.
2. Donnez $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathrm{Var}(Y_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} Y_n$.
3. Donnez deux intervalles de confiance au risque 5% et 1% pour la proportion d'hyperglycémiques. Comparer les deux intervalles.