Corrigé des exercices 5 et 6 du TD8 et de l'exercice 4 du TD 9 (2005-2006)

Tran Viet Chi

16 décembre 2005

1 Exercice 8.5

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : E \mapsto \mathbb{R}^+$ *une application mesurable positive. On suppose que* $0 \leq \int_E f(t)d\mu(t) < \infty$ *(*f *est donc intégrable) et on fixe* α *un réel positif. Déterminer suivant les valeurs de* α *:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t)$$

□

Démonstration. L'idée est que pour n grand, l'intégrand sera équivalent à $f(t)^\alpha/(n^{\alpha-1})$. On introduit la suite de fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall t \in E,\ f_n(t) = n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right). \tag{1}$$

En tant que composées de fonctions mesurables, les fonctions f_n sont elles-mêmes mesurables. Elles sont de plus positives car f est une fonction positive.

Lorsque $f = 0$ μ-presque partout, nous avons également par définition $f_n = 0$ μ-presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_E f_n(t)d\mu(t) = \int_E f(t)d\mu(t) = 0.$$

Considérons maintenant le cas où f n'est pas nulle μ-presque partout.

Cas $\alpha = 1$
Comme $f_n(t) \sim_{n\to\infty} f(t)$, nous avons convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f. Comme de plus $\forall x > -1$, $\log(1 + x) \leq x$, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in E,\ 0 \leq f_n(t) \leq f(t),$$

qui est intégrable et indépendante de n. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lebesgue et :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) = \int_E f(t)d\mu(t).$$

Cas $\alpha > 1$
En utilisant le lemme de Fatou :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} \left[n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right)\right] d\mu(t). \tag{2}$$

Calculons l'intégrand dans le membre de droite. Comme $\alpha > 1$, on a pour tout $t \in E$:

$$0 \leq n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) \leq \frac{f(t)}{n^{\alpha-1}}$$

qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. D'où :

$$\forall t \in E,\ \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) = 0.$$

On en déduit par (2) que :

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) \leq 0,$$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) = 0.$$

Cas $0 < \alpha < 1$
On utilise à nouveau le lemme de Fatou, mais cette fois avec les limites inf :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) \geq \int_E \liminf_{n\to\infty} \left[n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right)\right] d\mu(t). \tag{3}$$

Comme

$$n^\alpha \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) \sim_{n\to\infty} f(t)^\alpha,$$

l'intégrand dans le membre de droite de (3) diverge vers $+\infty$ pour tout t où $f(t) \neq 0$, c'est-à-dire sur un ensemble de mesure non nulle. On en déduit que le membre de droite de (3) est infini et alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E n \log\left(1 + \left(\frac{f(t)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(t) = +\infty.$$

■

2 Exercice 8.6 : Comportement asymptotique de la fonction gamma

On rappelle la définition de la fonction gamma :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \, \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Question 2.1. *Montrer que pour tout $t > 0$*

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^\infty \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}\, dy$$

□

Démonstration. On peut commencer par remarquer que $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-x}x^{t-1}$ est continue (donc mesurable pour la tribu borélienne) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous faisons le changement de variable $x = \sqrt{t}(y + \sqrt{t})$ ($t > 0$ étant fixé nous définissons ainsi un changement de variable affine) :

$$\begin{aligned}
\Gamma(t+1) = &\int_0^\infty e^{-x} x^t dx = \int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-\sqrt{t}(y+\sqrt{t})} \sqrt{t}^t (y+\sqrt{t})^t \sqrt{t}\, dy \\
=& \sqrt{t}\, t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^\infty e^{-\sqrt{t}y} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t dy. &(4)\\
=& \sqrt{t}\, t^t e^{-t} \left(\int_{-\sqrt{t}}^0 \exp\left[-\sqrt{t}y + t\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right] dy + \int_0^\infty \exp\left[-\sqrt{t}y + t\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right] dy\right). &(5)
\end{aligned}$$

(4) répond à la question. L'idée pour la suite de l'exercice est d'évaluer chacune des intégrales de (5). ■

Question 2.2. *Montrer que pour tout $y \geq 0$, la fonction*

$$\phi \,:\, t \mapsto t\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \tag{6}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $y \in]-\sqrt{t}, 0[$,

$$t\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{1}{2}y^2. \tag{7}$$

□

Démonstration. Le résultat (6) va servir à traiter l'intégrale de 0 à $+\infty$ dans (5) tandis que le résultat (7) va servir à traiter l'intégrale de $-\sqrt{t}$ à 0.

Montrons (6). La fonction ϕ est dérivable de dérivée :

$$\phi'(t) = \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) + t\frac{-\frac{y}{2t^{3/2}}}{1+\frac{y}{\sqrt{t}}} - \frac{y}{2\sqrt{t}} = \ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - \frac{y}{2\sqrt{t}}\left(1+\frac{1}{1+\frac{y}{\sqrt{t}}}\right).$$

Ceci nous amène à étudier la fonction auxiliaire :

$$\psi\ :\ u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(1+u) - \frac{u}{2}\frac{2+u}{1+u}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée :

$$\begin{aligned}\psi'(u) =& \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{2+u}{1+u} - \frac{u}{2}\frac{(1+u)-(2+u)}{(1+u)^2}\\ =& \frac{1}{2(1+u)^2}\left(2(1+u)-(2+u)(1+u)+u\right) = \frac{-u^2}{2(1+u)^2} \leq 0.\end{aligned}$$

Ainsi la fonction ψ est-elle continue décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\psi(0)=0$, $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\psi(u) \leq 0$. Nous en déduisons que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi'(t) \leq 0$ et ϕ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Considérons maintenant $y \in]-\sqrt{t}, 0[$. En réalisant un développement de Taylor-Lagrange de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3, il existe $x \in]y/\sqrt{t}, 0[$ tel que :

$$t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} = t\left(\frac{y}{\sqrt{t}} - \frac{y^2}{2t} + \frac{y^3}{3(1+x)t^{3/2}}\right) - y\sqrt{t} = -\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3(1+x)\sqrt{t}}.$$

Comme $y \in]-\sqrt{t}, 0[$ et comme $x \in]y/\sqrt{t}, 0[\subset]-1, 0[$, le terme $1+x$ est positif. Ainsi, $y^3/[3(1+x)\sqrt{t}]$ est-il négatif pour $y \in]-\sqrt{t}, 0[$. On en déduit que :

$$\forall y \in]-\sqrt{t}, 0[,\ t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}. \tag{8}$$

■

Question 2.3. *Avec l'égalité*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \sqrt{2\pi}$$

en déduire que

$$\Gamma(t+1) \sim_{t\to\infty} \sqrt{2\pi t}\, t^t e^{-t}.$$

On retrouve ainsi la formule de Stirling

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

□

Démonstration. Il s'agit de trouver un équivalent lorsque $t \to \infty$ de (4).

Considérons l'intégrale sur $[0, \infty[$ dans (5). Un développement limité de $\ln(1+y/\sqrt{t})$ au voisinage de l'infini donne :

$$t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} = t\left(\frac{y}{\sqrt{t}} - \frac{y^2}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) - y\sqrt{t} = -\frac{y^2}{2} + o(1). \tag{9}$$

Nous en déduisons que la suite de fonctions $(g_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ définie par

$$g_t\ :\ y \in \mathbb{R}_+ \mapsto \exp\left[-\sqrt{t}y + t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

converge simplement vers

$$h(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

lorsque t tend vers l'infini. En utilisant la monotonie de ϕ démontrée à la question précédente, la suite de fonctions $(g_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ est une suite décroissante (en t) de fonctions (de y). Nous avons une suite décroissante de fonctions mesurables positives à laquelle le théorème de Beppo-Levi s'applique et

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty g_t(y)dy = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy. \tag{10}$$

Considérons maintenant l'intégrale sur $]-\sqrt{t},0]$. Nous introduisons la suite de fonctions $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ définie par :

$$k_t\,:\,y\in\mathbb{R}_-\mapsto \mathbf{1}_{]-\sqrt{t},0[}(y)\,\exp\left[-\sqrt{t}y+t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

La famille de fonctions $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ est positive, mesurable. Le calcul (9) s'applique toujours et la famille $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ converge simplement vers $\exp(y^2/2)$ lorsque t tend vers l'infini. Par (7) nous avons :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\,\forall y\in\mathbb{R}_-,\,k_t(y)\le e^{-\frac{y^2}{2}}=h(y),$$

avec h intégrable sur $\mathbb{R}_-$ et indépendante de t. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée et :

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^0 k_t(y)dy = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy. \tag{11}$$

En réunissant (10) et (11) nous obtenons :

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\sqrt{t}}^\infty \exp\left[-\sqrt{t}y+t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right]dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\sqrt{2\pi},$$

et donc par (4) :

$$\Gamma(t+1)\sim_{t\to\infty}\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\,t^te^{-t}.$$

Pour $t=n\in\mathbb{N}$, en utilisant que $\Gamma(n+1)=n!$ nous retrouvons la formule de Stirling. ■

3 Exercice 9.4 : Inégalité de Jensen

Soit ν une mesure de probabilité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit θ une fonction convexe sur I. Montrer que pour toute fonction f intégrable telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\in I$ on a $\int_\mathbb{R} f(x)d\nu(x)\in I$ et :

$$\theta\left(\int_\mathbb{R} f d\nu\right)\le\int_\mathbb{R}\theta\circ f\,d\nu. \tag{12}$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ? □

Démonstration. On peut supposer que $I=]a,b[$. Si $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\in I=]a,b[$, alors comme $\int_\mathbb{R} d\nu(x)=1$

$$a<\int_\mathbb{R} f(x)d\nu(x)<b$$

et on a bien $\int_\mathbb{R} f(x)d\nu(x)\in I$.

La fonction θ étant convexe, on a :

$$\forall x\in I,\,\theta(x)=\sup\{\psi(x)\mid\psi\text{ est affine et }\psi\le\theta\}. \tag{13}$$

Nous commençons donc par montrer la formule de Jensen (12) pour une fonction affine, puis nous généraliserons l'inégalité à une fonction convexe grace à (13).

Soit $\psi(x)=\alpha x+\beta$ une fonction affine. On a par linéarité de l'intégrale et en utilisant que ν est une mesure de probabilité :

$$\psi\left(\int_\mathbb{R} f\,d\nu\right)=\alpha\int_\mathbb{R} f\,d\nu+\beta=\int_\mathbb{R}(\alpha f+\beta)\,d\nu=\int_\mathbb{R}\psi\circ f\,d\nu.$$

Revenons maintenant à la fonction convexe θ et soit ψ une fonction affine telle que $\forall x\in I,\ \psi(x)\le\theta(x)$. On a :

$$\psi\left(\int_\mathbb{R} f\,d\nu\right)=\int_\mathbb{R}\psi\circ f\,d\nu\le\int_\mathbb{R}\theta\circ f\,d\nu. \tag{14}$$

En passant au sup dans le membre de gauche de (14), on obtient l'inégalité (12).

Etudions maintenant le cas d'égalité.

Si ν est une mesure de Dirac (on notera $\nu = \delta_a$ la masse de Dirac en a), alors on a toujours égalité dans (12). En effet :

$$\begin{aligned}\theta\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_a(dx)\right) =& \theta(f(a)) \\ \int_{\mathbb{R}} \theta \circ f\, \delta_a(dx) =& \theta(f(a)).\end{aligned}$$

Si ν n'est pas une masse de Dirac, nous allons montrer que nécessairement, θ est affine sur I. Il existe un ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\nu(A) \in]0,1[$. Dans ce cas, soit α, $\beta \in \mathbb{R}$ (avec $\alpha < \beta$) et considérons la fonction

$$f(x) = \alpha \mathbf{1}_A(x) + \beta \mathbf{1}_{{}^cA}(x).$$

On a :

$$\begin{aligned}\theta\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)\right) =& \theta(\alpha\nu(A) + \beta\nu({}^cA)) \\ \int_{\mathbb{R}} (\theta \circ f)(x)\, \nu(dx) =& \theta(\alpha)\nu(A) + \theta(\beta)\nu({}^cA).\end{aligned}$$

Comme on est dans un cas d'égalité pour (12) alors :

$$\theta(\alpha\nu(A) + \beta\nu({}^cA)) = \theta(\alpha)\nu(A) + \theta(\beta)\nu({}^cA). \tag{15}$$

Ceci exprime que les images par θ des points α, β et $\nu(A)\alpha + \nu({}^cA)\beta \in]\alpha, \beta[$ (comme combinaison convexe de α et β) sont alignées.

Choisissons α et β dans I. Comme θ est convexe sur I, pour que les images des trois points distincts α, β et $\nu(A)\alpha + \nu({}^cA)\beta$ soient alignées, il est nécessaire que θ soit affine sur $]\alpha, \beta[$. α et β étant arbitraires sur I, on en déduit que θ est affine sur I.

■