

Probabilité 1 - Examen de juin 2007 - L1 MMIA

Durée 2 heures, calculatrice et documents interdits, 2 pages, barème prévu : 25 points.

Exercice 1 (Barème prévu : 4 points)

On suppose que le nombre de rhume X attrapés en un an par un individu est une variable aléatoire de Poisson de paramètre 5. Un médicament préventif réduit ce paramètre à 2 lorsqu'il fait effet. La probabilité pour que ce médicament fasse effet est 0,75. Soit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le médicament est efficace, 0 sinon.

1. Quelle est la loi de Y ? Donnez son espérance et sa variance.
2. Quelle est la loi de X lorsque le médicament est inefficace ? Donnez son espérance et sa variance. Quelle est cette loi lorsque le médicament est efficace ?
3. Stéphanie essaie ce médicament et attrape 2 rhumes dans l'année. Quelle est la probabilité pour que le médicament ait été efficace sur Stéphanie ?

Exercice 2 (Barème prévu : 6 points)

Esterinna et Rosanna ayant trouvé une urne contenant v boules vertes, r boules rouges et b boules blanches, décident de jouer au jeu suivant : Esterinna effectue des tirages avec remise dans l'urne, jusqu'à obtenir une boule rouge ou une boule verte. Le jeu s'arrête dès qu'une boule rouge ou verte est tirée, il continue tant qu'Esterinna tire une boule blanche. Si la dernière boule est rouge, c'est Esterinna qui gagne, si elle est verte, c'est Rosanna qui l'emporte.

1. Lors d'un tirage, quelle est la probabilité qu'Esterinna tire une boule verte ? une boule rouge ou une boule verte ?
2. Soit X le nombre de tirages effectués. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?
3. Quelle est la probabilité que Rosanna gagne au $i^{\text{ième}}$ tirage ?
4. Calculez la fonction génératrice G_X de X .
5. Calculez l'espérance et la variance de X .

Exercice 3 (Barème prévu : 7 points)

Soient Z et X deux variables aléatoires entières telles que :

- Z est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n \in \mathbb{N}^*$,
- La loi de X sachant que $Z = k$ est la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{k+1}.$$

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable X ? Déterminez les lois de (X, Z) et de X en fonction des $\mathbb{P}(Z = k)$ (on calculera $\mathbb{P}((X, Z) = (i, k))$ et $\mathbb{P}(X = i)$ pour des valeurs de i et k convenables).
2. Calculez l'espérance de X en fonction de $\mathbb{E}(Z)$.
3. Déterminez la loi de $Z - X$ et montrez que c'est la loi de X .

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4 (Barème prévu : 8 points)

Lors d'une élection, on suppose qu'une proportion p de la population compte voter pour Nicolas tandis que les $1 - p$ restants ont l'intention de voter pour Ségolène. On interroge n personnes, choisies de façon indépendante dans la population, et on suppose qu'elles répondent honnêtement.

1. Donnez une approximation \bar{X}_n de la proportion de personnes comptant voter pour Nicolas.
2. Calculez $\mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\text{Var}(\bar{X}_n)$.
3. Quelle est la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X}_n$?
4. Pour $a > 0$, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrez que :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geq a) \leq \frac{p(1-p)}{a^2 n}$$

5. Soit $f : p \in [0, 1] \mapsto p(1-p) \in \mathbb{R}$. Calculez f' et déterminez le maximum de la fonction f .
6. En utilisant les résultats des questions 4 et 5 quel est nombre d'individus n à interroger pour que la probabilité que l'écart entre \bar{X}_n et p soit supérieur à $a = 1\%$ soit inférieure à 5% ?
7. Toujours en utilisant les questions 4 et 5, donnez l'intervalle de confiance à 95% auquel appartient p lorsque l'on interroge $n = 1000$ personnes. Dans le cas où $\bar{X}_n = 51\%$ (et $1 - \bar{X}_n = 49\%$), pouvez-vous faire un commentaire de ce résultat ? (on donne $\sqrt{1/200} \simeq 7\%$)

Cet exercice est inspiré d'un sondage réalisé par la TNS-Sofres le 24 avril 2007. Le cadre de cet exercice est bien sûr simplificateur, par les hypothèses faites sur les répondants et par les techniques d'estimation de p choisies (nécessité de redressement des fausses ou non-réponses, méthodes de sondage par "quota" pour garantir la représentativité de l'échantillon de personnes interrogées...)