Probabilité 1, L1 MMIA, Corrigé du DM du 17 mai 2007

Exercice 61

1. L'ensemble des résultats possibles du lancé des deux dés considérés distincts est $\Omega = [\![1,6]\!]^2$, de cardinal 36. On note :

$$A = \{\text{Le premier dé montre } 6\}, \quad B = \{\text{Le second dé montre } 6\}.$$

Les dés étant équilibrés, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/6$. Les résultats des dés étant indépendants $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 1/36$. La probabilité que l'un des dés montre 6 est :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36.$$

2. Soit $C = \{\text{Les résultats des 2 dés sont différents}\}$, de cardinal $6 \times 5 = 30$. Nous avons aussi $\text{card}((A \cup B) \cap C) = \text{card}(A \cup B) - 1 = 10$, car l'intersection $(A \cup B) \cap C^c$ ne contient que $(6,6)$. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B \,|\, C) = \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\text{card}((A \cup B) \cap C)}{\text{card}(C)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 62

1. Soient X le numéro indiqué par le premier dé (c'est une variable aléatoire à valeur dans $[\![1,6]\!]$) et Y le numéro indiqué par le second dé.

$$\mathbb{P}(X + Y \geq 10) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X + Y \geq 10 \,|\, Y = i)\, \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=4}^{6} \mathbb{P}(X \geq 10 - i \,|\, Y = i)\, \mathbb{P}(Y = i)$$

puisque $\mathbb{P}(X + Y \geq 10 \,|\, Y = i) = 0$ pour $i < 4$.

$$\mathbb{P}(X + Y \geq 10) = \sum_{i=4}^{6} \frac{6 - (10 - i - 1)}{6} \frac{1}{6} = \sum_{i=4}^{6} \frac{i-3}{36} = \frac{1}{6}$$

2. Soit $A = \{\text{l'un des dés a donné } 5\}$. Par le même raisonnement que pour l'exercice 61, on a $\mathbb{P}(A) = 11/36$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X + Y \geq 10 \,|\, A) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X + Y \geq 10\} \cap \{X = 5\}) + \mathbb{P}(\{X + Y \geq 10\} \cap \{Y = 5\}) - \mathbb{P}(\{X + Y \geq 10\} \cap \{X = 5\} \cap \{Y = 5\})}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Y \geq 5,\, X = 5) + \mathbb{P}(X \geq 5,\, Y = 5) - \mathbb{P}(Y = 5,\, X = 5)}{11/36} = \frac{3}{11}.
\end{aligned}$$

Exercice 63

Soient les événements $A = \{\text{la première carte tirée est noire}\}$, $B = \{\text{la seconde carte tirée est noire}\}$. $P(A) = P(A^c) = 26/52 + 1/2$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \,|\, A^c)\mathbb{P}(A^c) = \frac{25}{51}\frac{1}{2} + \frac{26}{51}\frac{1}{2} = \frac{26 + 25}{2 \times 51} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 66

1. Soient les événements $A = \{\text{l'animal est malade}\}$ et $B = \{\text{le test est positif}\}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \,|\, A^c)\, \mathbb{P}(A^c) = \frac{9}{10}\frac{2}{10} + \left(1 - \frac{95}{100}\right)\left(1 - \frac{2}{10}\right) = \frac{11}{50}.$$

2. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(B \,|\, A)\, P(A)}{\mathbb{P}(B \,|\, A)\, P(A) + \mathbb{P}(B \,|\, A^c)\, P(A^c)} = \frac{9/10 \times 2/10}{9/10 \times 2/10 + 5/100 \times 8/10} = \frac{9}{11}.$$