Corrigé de la question 3 de l'exo 1 du TD 3

Tran Viet Chi

Enoncé : *On demande de calculer l'information de Fisher pour une loi de Weibull de paramètres* $\alpha > 0$, $\theta > 0$.

• Le modèle statistique considéré est celui associé à une seule observation : $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \mathcal{W}(\alpha,\theta), \alpha > 0, \theta > 0)$. La loi de Weibull est une loi continue sur $\mathbb{R}_+^*$ dominée par la mesure de Lebesgue ; sa densité par rapport à Lebesgue est sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x,\alpha,\theta) = \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}$$

• Ce modèle n'est pas un modèle exponentiel, on doit donc utiliser le théorème général pour montrer la régularité :

1. Il existe bien une mesure dominante σ-finie par rapport à laquelle on peut définir la densité du modèle.
2. L'espace des paramètres est $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est ouvert, non vide.
3. La densité f est différentiable en α et θ pour tout x.
4. Les dérivées par rapport à α et θ de f sont :

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha f(x,\alpha,\theta) &= (\theta + \alpha\theta(\ln x - \theta \ln x e^{\alpha \ln x})) \exp\left((\alpha-1)\ln x - \theta \exp(\alpha \ln x)\right) \\
&= \theta(1 + \alpha \ln x - \alpha\theta \ln x x^\alpha) x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \\
\partial_\theta f(x,\alpha,\theta) &= (\alpha x^{\alpha-1} - \alpha\theta x^{2\alpha-1}) e^{-\theta x^\alpha}
\end{aligned}$$

En fait, le calcul des deux dérivées ci-dessus n'est pas nécessaire si on remarque dès le début que celles-ci sont nécessairement sous la forme $P(x^\alpha, \ln x)e^{-\theta x^\alpha}$ avec $\theta > 0$ et P un polynôme.

Pour montrer que l'on peut dériver $(\alpha,\theta) \mapsto \int_A f(x,\alpha,\theta)dx$ par rapport à α et θ et que les dérivées sont obtenues par dérivation sous le signe somme, il nous faut une hypothèse de majoration des dérivées indépendamment des paramètres. Cette majoration est impossible sur tout $(\mathbb{R}_+^*)^2$, mais on peut la réaliser localement :
Pour tout $(\alpha,\theta) \in \mathbb{R}_*^+$, il existe un ouvert de la forme $]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[\subset (\mathbb{R}_+^*)^2$ le contenant et tel que sur cet ensemble :

$$\begin{aligned}
|\partial_\alpha f(x,\alpha,\theta)| &\leq b_2(1 + b_1 \ln x\, 1_{x>1} - b_1 b_2 \ln x\, 1_{x<1} x_1^b) \max(x^{b_1-1}, x^{a_1-1}) e^{-a_2 x^{a_1}} \\
&\leq \tilde{P}_1(x^{a_1}, x^{b_1}, \ln x) e^{-a_2 x^{a_1}} \\
|\partial_\theta f(x,\alpha,\theta)| &\leq (b_1 \max(x^{b_1-1}, x^{a_1-1}) + b_1 b_2 \max(x^{2b_1-1}, x^{2a_1-1})) e^{-a_2 x^{a_1}} \\
&\leq \tilde{P}_2(x^{a_1}, x^{b_1}) e^{-a_2 x^{a_1}}
\end{aligned}$$

où $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ sont des polynômes dont les coefficients ne dépendent pas de α ni de θ. Les majorants ci-dessus sont des polynômes pris en x^{a_1}, x^{b_1} et $\ln x$, multipliés par une exponentielle décroissante, et sont donc intégrables : *on a une majoration locale par une fonction intégrable. On peut donc appliquer noter théorème de dérivation sous le signe somme* :

$$\partial_\alpha \int_{(x)} f(x,\alpha,\theta)dx = \int_{(x)} \partial_\alpha f(x,\alpha,\theta)dx$$

$$\partial_\theta \int_{(x)} f(x,\alpha,\theta)dx = \int_{(x)} \partial_\theta f(x,\alpha,\theta)dx$$

(sans faire les calculs, seulement avec l'argument sur la forme des dérivées, la conclusion tombe relativement vite).

Le modèle est régulier et on peut définir la matrice d'information de Fisher.

• La vraisemblance est deux fois dérivable en (α,θ) et les dérivées secondes sont elles aussi de la forme $Q(x^\alpha, \ln x)e^{-\theta x^\alpha}$ avec Q polynôme à deux variables. Donc, on peut comme précédemment les majorer localement (en (α,θ)) par une fonction intégrable (en x) et indépendante de α et θ. On peut alors appliquer le théorème de dérivation seconde sous le signe somme et on sait qu'on peut alors calculer l'information de Fisher par :

$$
\begin{aligned}
I(\alpha,\theta) &= -\mathbb{E}_{(\alpha,\theta)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \ln f(x,\alpha,\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\theta} \ln f(x,\alpha,\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\theta} \ln f(x,\alpha,\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x,\alpha,\theta) \end{pmatrix} \\
& \quad \text{après calcul des dérivées secondes :} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} + \theta\mathbb{E}(X^\alpha \ln^2 X) & \mathbb{E}(X^\alpha \ln X) \\ \mathbb{E}(X^\alpha \ln X) & \frac{1}{\theta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On sait qu'on peut calculer les termes $\mathbb{E}(X^\alpha \ln^{1,2} X)$ à partir de $\Gamma(2)$, $\Gamma'(2)$, $\Gamma''(2)$.