Probabilité 1, L1 MMIA, Corrigé rapide du partiel du 2 mai 2007

Exercice 1

1. $A_1 = [0,1[$, $A_2 = [0,3/2[$, $A_1 \cup]1/2,5] = [0,5]$, $A_1 \triangle]1/2,5/4] = [0,1/2] \cup [1,5/4[$, $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = [0,2[$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = [0,1[$.
2. $B_1 = B_3 = B_5 = [1/2,2[$, $B_2 = A_2 = [0,3/2[$, $B_4 = A_4 = [0,7/4[$, $B_6 = A_6 = [0,11/6[$.
3. La suite $(B_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion. La suite $(B_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{2n+1} = [1/2,2[$.
4. $\cup_{n\geq N} B_n = [0,2[$. Si N est pair,

$$\bigcap_{n\geq N} B_n = \left(\bigcap_{2p\geq N} B_{2p}\right) \cap \left(\bigcap_{2p+1\geq N} B_{2p+1}\right) = A_N \cap \left[\frac{1}{2},2\right[= \left[\frac{1}{2},2-\frac{1}{N}\right[$$

et de même, si N est impair, $\cap_{n\geq N} B_n = [1/2, 2-1/(N+1)[$.
5. $\cap_{N\geq 0} \cup_{n\geq N} B_n = \cap_{N\geq 0} [0,2[= [0,2[$ et

$$\bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{n\geq N} B_n = \left(\bigcup_{N \text{ pair}} \left[\frac{1}{2},2-\frac{1}{N}\right[\right) \cup \left(\bigcup_{N \text{ impair}} \left[\frac{1}{2},2-\frac{1}{N+1}\right[\right) = \left[\frac{1}{2},2\right[.$$

Exercice 2

1. Nous avons bien sûr $\sum_{i=1}^{+\infty} q^i = 1/(1-q)$.

$$\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1} = \frac{d}{dq}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} q^i\right) = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)q^{i-2} = \frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} q^i\right) = \frac{2}{(1-q)^3}$$

2. La constante α est telle que $\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X,Y)=(i,j)\right) = 1$:

$$1 = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} = \alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2^i} = \alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^j}{1-1/2} = \alpha\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4^j}\right) = \frac{2}{3}\alpha.$$

On en déduit $\alpha = 3/2$.
3. En utilisant la valeur de α que l'on vient de trouver :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=i}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{i+j}} = \frac{\alpha}{2^i} \times \frac{1}{2^i}\frac{1}{1-1/2} = \frac{\alpha}{2^{2i-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}\frac{3}{4}.$$

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/4$.
4 et 5. L'espérance et la variance d'une loi géométrique de paramètre $1/4$ sont $\mathbb{E}(X) = 1/p = 4$ et $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2 = 12$.
6. On a $\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} = \alpha\left(\frac{1}{2^j} - \frac{1}{4^j}\right)$.
7. En utilisant la question **1** :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(Y=j) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j} - \frac{j}{4^j}\right) = \frac{3}{2}\left(2-\frac{4}{9}\right) = \frac{7}{3}.$$

8. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque les valeurs que peut prendre Y dépendent des valeurs de X et réciproquement.
9. De même qu'à la question 1, on peut montrer que $\sum_{j=i}^{+\infty} q^j = q^i/(1-q)$ et $\sum_{j=i}^{+\infty} jq^{j-1} = (iq^{i-1} - (i-1)q^i)/(1-q)^2$. Alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\alpha ij}{2^{i+j}} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i}\sum_{j=i}^{+\infty} \frac{j}{2^j} = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^i} \times \frac{i+1}{2^{i-1}} = \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i(i+1)}{4^{i-1}} = \frac{3}{4}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(i-1)i}{4^{i-2}} = \frac{32}{9}$$

en utilisant la question **1**. Enfin $\mathrm{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{32}{9} - 4 \times \frac{7}{3} = -\frac{52}{9}$.

Exercice 3

Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p > 0$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
1. Pour une variable de Poisson : $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. Pour une variable de Bernoulli : $\mathbb{E}(Y) = p$ et $\mathrm{Var}(Y) = p(1-p)$.
2. C'est un calcul fait en TD :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

3. Comme X et Y sont indépendantes, $1/(1+X)$ et Y sont indépendantes et :

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{1+X}\right) = \mathbb{E}(Y) \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{p(1-e^{-\lambda})}{\lambda}.$$

4. Toujours par indépendance de X et Y : $\mathrm{Var}\,(Y+X) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \lambda + p(1-p)$.

Exercice 4 (Barème prévu : 8 points)

1. Les questions **A** ont été traitées en TD :

$$nC_m^n = \frac{n \times m!}{n!(m-n)!} = \frac{m \times (m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = mC_{m-1}^{n-1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Initialisation Pour $N = n$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$.
Récurrence Supposons que pour $N \geq n$ fixé, $\sum_{m=n}^{N} C_m^n = C_{N+1}^{n+1}$. Montrons cette propriété pour $N+1$:

$$\sum_{m=n}^{N+1} C_m^n = \sum_{m=n}^{N} C_k^n + C_{N+1}^n = C_{N+1}^{n+1} + C_{N+1}^n = \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!} + \frac{(N+1)!}{n!(N+1-n)!}$$
$$= \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{N+1-n}\right) = \frac{(N+2)!}{(n+1)!(N+1-n)!} = C_{N+2}^{n+1}.$$

3. Ω est l'ensemble des suites que l'on peut réaliser avec n boules blanches et n boules noires. Comme les boules sont indistinguables, ces suites sont déterminées par le choix des positions des boules noires (par exemple). Le cardinal de Ω est donc C_{2n}^n.
4. Les valeurs possibles sont les entiers entre n (toutes les boules noires sont tirées en premier) et $2n$ (la dernière boule à être tirée est noire).
5. Soit $m \in [\![n, 2n]\!]$. Si $X = m$, la dernière boule noire tirée est tirée au tirage m et les tirages des $n-1$ autres boules noires sont compris entre 1 et $m-1$:

$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{2n}^n}.$$

6. L'espérance de X est donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{m=n}^{2n} \frac{mC_{m-1}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \sum_{m=n}^{2n} \frac{nC_m^n}{C_{2n}^n} = \frac{nC_{2n+1}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \frac{n(2n+1)}{n+1},$$

en utilisant les résultats des questions **1** et **2**.