Probabilité 1, L1 MMIA, Corrigé rapide du partiel du 2 mai 2007

**Exercice 1**

1. \[ A_1 = [0, 1], \ A_2 = [0, 3/2], \ A_1 \cup [1/2, 5] = [0, 5], \ A_1 \cap [1/2, 5/4] = [0, 1/2] \cup [1, 5/4], \ \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 2], \ \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1]. \]

2. \[ B_1 = B_2 = B_3 = [1/2, 2], \ B_2 = A_2 = [0, 3/2], \ B_1 = A_4 = [0, 7/4], \ B_0 = A_6 = [0, 11/6]. \]

3. La suite \( (B_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \) est croissante pour l’inclusion. La suite \( (B_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \) est constante et \( \forall n \in \mathbb{N}, \ B_{2n+1} = [1/2, 2] \).

4. \( \cup_{n \geq N} B_n = [0, 2] \). Si \( N \) est pair,

\[
\bigcap_{n \geq N} B_n = \left( \bigcap_{2p \geq N} B_{2p} \right) \cap \left( \bigcap_{2p+1 \geq N} B_{2p+1} \right) = A_N \cap \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{N} \right]
\]

et de même, si \( N \) est impair, \( \cap_{n \geq N} B_n = [1/2, 2 - 1/(N + 1)] \).

5. \( \cap_{N \geq 0} \cup_{n \geq N} B_n = \cap_{N \geq 0} [0, 2] = [0, 2] \) et

\[
\bigcup_{N \geq 0} \bigcap_{n \geq N} B_n = \left( \bigcup_{N \text{ pair}} \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{N} \right] \right) \cup \left( \bigcup_{N \text{ impaire}} \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{N + 1} \right] \right) = \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right].
\]

**Exercice 2**

1. Nous avons bien sûr \( \sum_{i=1}^{+\infty} q^i = 1/(1 - q) \).

\[
\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{-1} = \frac{d}{dq} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \right) = \frac{1}{(1 - q)^2}, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} i(i - 1)q^{-2} = \frac{d^2}{dq^2} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \right) = \frac{2}{(1 - q)^3}
\]

2. La constante \( \alpha \) est telle que \( \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = 1 \):

\[
1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{j+i}} = \alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{2^j - 1 - 1/2} = \alpha \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4^j} \right) = \frac{2}{3} \alpha.
\]

On en déduit \( \alpha = 3/2 \).

3. En utilisant la valeur de \( \alpha \) que l’on vient de trouver :

\[
\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{j+i}} = \frac{\alpha}{2^j} \times \frac{1}{2^j - 1 - 1/2} = \frac{\alpha}{2^{2j-i-1}} = \left( \frac{1}{4} \right)^{i-1} \frac{3}{4}.
\]

La variable aléatoire \( X \) suit une loi géométrique de paramètre \( p = 1/4 \).

4 et 5. L’espérance et la variance d’une loi géométrique de paramètre \( 1/4 \) sont \( \mathbb{E}(X) = 1/p = 4 \) et \( \text{Var}(X) = (1 - p)/p^2 = 12 \).

6. On a \( \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha}{2^{i+j}} = \alpha \left( \frac{1}{2^j} - \frac{1}{4^j} \right) \).

7. En utilisant la question 1 :

\[
\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(Y = j) = \alpha \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j} - \frac{j}{4^j} \right) = \frac{3}{2} \left( \frac{2 - \frac{4}{9}}{4} \right) = \frac{7}{3}.
\]

8. Les variables \( X \) et \( Y \) ne sont pas indépendantes puisque les valeurs que peut prendre \( Y \) dépendent des valeurs de \( X \) et réciproquement.

9. De même qu’à la question 1, on peut montrer que \( \sum_{j=1}^{+\infty} q^j = q^j/(1 - q) \) et \( \sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} = (iq^{-1} - (i - 1)q^j)/(1 - q)^2 \).

Alors :

\[
\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha ij}{2^{i+j}} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{2^j} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \times \frac{i + 1}{2^{i-1}} = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i(i + 1)}{4^{i-1}} = \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(i - 1)i}{4^{i-2}} = \frac{32}{9}
\]

en utilisant la question 1. Enfin \( \text{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{32}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{-52}{9} \).
Exercice 3

Soit \( X \) une variable de Poisson de paramètre \( \lambda > 0 \) et \( Y \) une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre \( p > 0 \). Les variables aléatoires \( X \) et \( Y \) sont indépendantes.

1. Pour une variable de Poisson : \( \mathbb{E}(X) = \lambda \), \( \text{Var}(X) = \lambda \). Pour une variable de Bernoulli : \( \mathbb{E}(Y) = p \) et \( \text{Var}(Y) = p(1-p) \).

2. C’est un calcul fait en TD :

\[
\mathbb{E}\left( \frac{1}{1+X} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.
\]

3. Comme \( X \) et \( Y \) sont indépendantes, \( 1/(1+X) \) et \( Y \) sont indépendantes et :

\[
\mathbb{E}\left( \frac{Y}{1+X} \right) = \mathbb{E}(Y) \times \mathbb{E}\left( \frac{1}{1+X} \right) = \frac{p(1 - e^{-\lambda})}{\lambda}.
\]

4. Toujours par indépendance de \( X \) et \( Y \) : \( \text{Var}(Y + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \lambda + p(1-p) \).

Exercice 4 (Barème prévu : 8 points)

1. Les questions A ont été traitées en TD :

\[
nC_m^n = \frac{n \times m!}{n!(m-n)!} = \frac{m \times (m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = mC_{m-1}^{n-1}.
\]

2. Soit \( n \in \mathbb{N}^* \) fixé.
Initialisation Pour \( N = n \), \( C_n^n = 1 = C_{n+1}^n \).
Récurrence Supposons que pour \( N \geq n \) fixé, \( \sum_{m=n}^{N} C_m^n = C_{N+1}^{n+1} \). Montrons cette propriété pour \( N + 1 \) :

\[
\sum_{m=n}^{N+1} C_m^n = \sum_{m=n}^{N} C_m^n + C_{N+1}^n = C_{N+1}^{n+1} + C_{N+1}^n = \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!} + \frac{(N+1)!}{n!(N+1-n)!} = \frac{(N+1)!}{n!(N+1-n)!} = C_{N+2}^{n+2}.
\]

3. \( \Omega \) est l’ensemble des suites que l’on peut réaliser avec \( n \) boules blanches et \( n \) boules noires. Comme les boules sont indistinguables, ces suites sont déterminées par le choix des positions des boules noires (par exemple). Le cardinal de \( \Omega \) est donc \( C_{2n}^n \).
4. Les valeurs possibles sont les entiers entre \( n \) (toutes les boules noires sont tirées en premier) et \( 2n \) (la dernière boule à être tirée est noire).
5. Soit \( m \in [n, 2n] \). Si \( X = m \), la dernière boule noire tirée est tirée au tirage \( m \) et les tirages des \( n-1 \) autres boules noires sont compris entre 1 et \( m-1 \) :

\[
\mathbb{P}(X = m) = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{2n}^n}.
\]

6. L’espérance de \( X \) est donc :

\[
\mathbb{E}(X) = \sum_{m=n}^{2n} mC_{m-1}^{n-1} = \sum_{m=n}^{2n} nC_m^n = nC_{2n}^n = \frac{n(2n+1)}{n+1},
\]

en utilisant les résultats des questions 1 et 2.