Corrigé partiel des DM 3 et 4

Exercice 7 (Tableaux noirs)

Les tableaux sont supposés indistingables.

Nous considérons une séquence *ordonnée* de 13 éléments (10 tableaux et 3 séparateurs).
– Les tableaux situés avant le premier séparateur dans la liste seront affectés à la première école,
– Les tableaux situés entre le premier et le second séparateur seront affectés à la seconde école,
– Les tableaux situés entre le second et le troisième séparateur seront affectés à la troisième école,
– Les tableaux situés après le troisième séparateur (fin de la liste) seront affectés à la quatrième école.
Nous avons C_{13}^3 listes possibles, soient 286 possibilités.

Si maintenant chaque école reçoit au moins un tableau, il ne reste plus que 6 tableaux à répartir. En reprenant le raisonnement précédent, nous avons $C_{6+3}^3 = 84$ possibilités.

Exercice 9 (Escroc morpho-graphologue)

1. Probabilité d'erreur sur toutes les photos.
$\star$ Nous choisissons pour Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. L'entier en i^{me} position sera le numéro du spécimen associé à la i^{me} photo. Nous avons : $\text{card}(\Omega) = n!$
$\star$ Soient les événements suivants :

$$A = \{\text{l'escroc morpho-graphologue a faux sur toutes les photos}\}$$
$$B_i = \{\text{le spécimen d'écriture associé à la } i^{\text{ème}} \text{ photo est le bon}\}$$

Sur l'événement $\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} B_i$ au moins l'un des spécimens est bien associé. Autrement dit $A = \left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} B_i\right)^c$.
Nous avons donc par l'exercice 8 :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} B_i\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in[\![1,k]\!]} A_{i_j}\right).$$

Il nous faut donc à déterminer les probabilités $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in[\![1,k]\!]} A_{i_j}\right)$ pour des k-uplets d'indices $i_1, \cdots i_k$. Nous allons dénombrer le cardinal de cet ensemble pour en déterminer sa probabilité :
$\star$ L'événement $\bigcap_{j\in[\![1,k]\!]} A_{i_j}$ signifie que le morpho-graphologue a bien associé les photos numéro $i_1, \cdots i_k$ aux spécimens associés. Il reste à dénombrer les possibilités d'associations pour les photos et les spécimens restant : il s'agit d'une permutation qui associe les $n-k$ spécimens restants aux $n-k$ photos restantes. La probabilité de cet événement est donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in[\![1,k]\!]} A_{i_j}\right) = \frac{\text{card}\left(\bigcap_{j\in[\![1,k]\!]} A_{i_j}\right)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Comme cette probabilité ne dépend pas du choix particulier des k indices $i_1, \cdots i_k$ choisis, on peut appliquer la formule de la question 4 de l'exercice 8 et :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

qui tend vers e^{-1} lorsque $n \to +\infty$.

Remarquons que le cardinal de l'ensemble A est donné par :

$$\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) \times \mathbb{P}(A) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2.<u>Probabilité de faire exactement k associations exactes.</u>
⋆ Nous conservons le même ensemble des possible Ω.
⋆ Soit $C = \{$Le morpho-graphologue réalise exactement k bonnes associations$\}$. Pour dénombre le cardinal de cet événement :

- Nous dénombrons le nombre de choix possibles pour les k associations exactes : il s'agit des combinaisons de k photo-spécimens pris parmi n, C_n^k.
- Nous dénombrons le nombre de choix possibles pour qu'aucune des $n-k$ photos restantes ne soit associée au bon spécimen. En utilisant le résultat de la question 1, ce nombre est :

$$(n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Nous en déduisons :

$$\text{card}(C) = C_n^k (n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

⋆ Nous pouvons donc conclure :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!},$$

qui tend vers $e^{-1}/k!$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 15

1. Pour que $\mathbb{P}(X = k) = ak(8-k)$ définisse une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, il est nécessaire que $\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(X = k) = 1$, soit :

$$8a \sum_{k=1}^{8} k - a \sum_{k=1}^{8} k^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8a \frac{8(8+1)}{2} - a \frac{8(8+1)(2 \times 8 + 1)}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{84}.$$

2. On a avec cette valeur de a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{8} k \mathbb{P}(X = k) = 8a \sum_{k=1}^{8} k^2 - a \sum_{k=1}^{8} k^3 = 8a \frac{8(8+1)(2 \times 8 + 1)}{6} - a \frac{8^2(8+1)^2}{4} = 336a = 4.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \left(8a \sum_{k=1}^{8} k^3 - a \sum_{k=1}^{8} k^4\right) - 4^2 = 19 - 16 = 3,$$

en utilisant en plus des formules rappelées à l'exercice 14 :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(2n+1)(n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$