Corrigé d'exercices de la fiche 2

Viet Chi TRAN et Yoann GENTRIC

14 janvier 2007

Exercice 1

5. $f : x \mapsto x - 3 + (x+1)\exp(-x)$.

La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1 - x\exp(-x)$ et $f''(x) = (x-1)\exp(-x)$. Comme $\exp(-x)$ est toujours positif, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)$. On a donc $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ et $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$, donc f est concave sur $]-\infty, 1]$, et convexe sur $[1, +\infty[$.

6. $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculons la dérivée seconde de f :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2},$$

et

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^4}.$$

On en déduit que $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$, et $f''(x) \leq 0$ pour $x \in [-5, 1]$. Donc f est convexe sur $]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$, et concave sur $[-5, 1]$.

Exercice 2

6. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

f est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0.$$

$x = 0$ est point stationnaire de f et comme $f''(x) > 0$, f est convexe et 0 est un minimum global de f. (Remarque : ce dernier résultat peut également s'obtenir en faisant un tableau de variations).

8. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- f est définie et deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
- La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}/x - \ln x/(2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

f' est du signe de $(2 - \ln x)$ et s'annule en e^2 point stationnaire.

- Remarquons que la dérivée seconde est :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^{5/2}}\left(2 - \frac{3}{4}\ln(x)\right),$$

comme f'' n'est pas de signe constant, f n'est ni concave ni convexe, mais comme $f''(e^2) = -1/(2e^5) < 0$, on retrouve que f est localement concave au point stationnaire e^2 qui est un maximum local.

- e^2 est-il un maximum global ? En reprenant la formule de f' :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$		croissante		décroissante	

On en déduit que f admet un minimum global en $\exp(2)$.

14. $f : x \mapsto \ln(x^2) + 1$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calculons la dérivée de f : $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$. f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc f ne possède pas d'extremum.

19. $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{2x-1}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+2)}{(2x-1)^2} = 2\frac{x^2 - x - 2}{(2x-1)^2}.$$

f' est du signe de $x^2 - x - 2$, donc les points stationnaires sont $x = -1$ et $x = 2$ et :

x	0		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(x)$		croissante		décroissante		croissante	

f possède donc 1 maximum local en -1 et un maximum local en 2.

Exercice 4

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par une relation faisant intervenir u_n et u_{n+1} : $u_0 = 100$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_{n+1} - u_n)/u_n = n$. Nous essayons d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = nu_n + u_n = (1+n)u_n. \tag{1}$$

Comme $n + 1 > 1$, nous en déduisons par multiplication par u_n et par (1) : $u_{n+1} > u_n$ à condition que u_n soit positif (sinon, l'inégalité change de sens !).

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ $u_{n+1} > u_n$.

Condition initiale : Pour $n = 1$, $u_1 = u_0 = 100 > 0$ et $u_2 = (1+1)u_1 = 200 > u_1 = 100$.

Hérédité : Supposons que pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$. Nous en déduisons que $u_{n+1} > 0$ et en multipliant $1 < n + 2$ par u_{n+1} :

$$u_{n+1} < u_{n+1}(n+2) = u_{n+2} \text{ par (1) en remplaçant } n \text{ par } n+1.$$

Conclusion : Nous venons de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n = 1$ et comme $u_0 = u_1 = 100$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 0$ (mais pas strictement).

Exercice 5

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = 1$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = q(1 + 1/n)$. Nous avons une définition différente pour $n = 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et nous allons devoir traiter séparément ces deux cas.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $1 < 1 + 1/n < 2$, on obtient en multipliant chaque membre par $q > 0$: $q < q(1 + 1/n) < 2q$ c'est à dire $q < u_n < 2q$ pour $n \geq 1$. Comme $u_0 = 1$, nous avons donc pour $n \geq 0$:

$$\min(1, q) \leq u_n \leq \max(1, 2q).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée donc bornée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1/(n+1) < 1/n$, nous avons :

$$u_{n+1} = q\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < q\left(1 + \frac{1}{n}\right) = u_n,$$

et nous en déduisons que (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

Examinons les relations entre $u_0 = 1$ et $u_1 = 2q$.

Si $q < 1/2$: alors $u_0 > u_1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 0$.

Si $q > 1/2$: alors $u_0 < u_1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone (uniquement décroissante à partir de $n = 1$).

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$ et minorée, donc convergente.

4. Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = q(1 + 1/n)$ nous avons $\lim_{n\to+\infty} u_n = q$.

Exercice 12

Nous étudions la suite numérique définie par $u_n = n/4^n$. Nous avons :

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\frac{n+1}{4^n} = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{u_n}{4} + \frac{1}{4^{n+1}}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique.

1. Nous avons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x/4^x = x\exp(-x\ln 4)$. En dérivant :

$$f'(x) = \exp(-x\ln 4)\,(1 - x\ln 4)\,,\ \text{qui s'annule pour } x = \frac{1}{\ln 4} < 1.$$

Nous en déduisons que f est croissante sur $]-\infty, 1/\ln 4]$ et décroissante sur $[1/\ln 4, +\infty[$ (et donc sur $[1, +\infty[$). Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$. Comme $u_0 = 0 < u_1 = 1/4$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est cependant pas monotone.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante à partir de $n = 1$ et positive (donc minorée par 0), est convergente.

3. Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = 1/4 \leq 1/2$.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $u_n \leq 1/2^n$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + \frac{1}{4^{n+1}} \leq \frac{1}{4}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+1}} \leq \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

et l'hypothèse de récurrence est satisfaite.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1/2^n$.

4. $\lim_{n\to+\infty} 1/2^n = 0$, donc par le résultat de la question 3 et par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.Nous avons :

$$v_n = 1 - \frac{n}{2n + 4^n}, \quad \text{impliquant } 1 - \frac{n}{4^n} = 1 - u_n \leq v_n \leq 1.$$

Par encadrement, en utilisant le résultat de la question 4, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 15

1. Montrons par récurrence que $0 < u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, nous avons bien par hypothèse $0 < u_0 < v_0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $0 < u_n < v_n$. Comme :

$$0 < (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{u_n v_n} < \frac{u_n + v_n}{2},$$

alors par définition de u_{n+1} et v_{n+1}, $u_{n+1} < v_{n+1}$.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.

2. Comme u_{n+1} est défini à partir de u_n et v_n par un produit, nous allons considérer le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{u_n v_n}u_n = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} > \sqrt{1} = 1,\ \text{par la question 1.}$$

Nous en déduisons $u_{n+1} > u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
v_{n+1} est défini à partir de u_n et v_n par une somme. Nous considérons la différence :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0 \text{ par la question 1.}$$

Nous en déduisons $v_n > v_{n+1}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive (donc minorée par 0). Elle est donc convergente.

Une suite convergente est bornée, donc majorée (il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < M$). Comme $0 < u_n < v_n < M$, nous en déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (en particulier majorée par M). Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle converge.

Exercice 18

1. En utilisant les définitions de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + v_{n+1} &= \frac{2^{n+1} - 4(n+1) + 3}{2} + \frac{2^{n+1} + 4(n+1) - 3}{2} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2\left(u_n + v_n\right), \\
u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{2^{n+1} - 4(n+1) + 3}{2} - \frac{2^{n+1} + 4(n+1) - 3}{2} \\
&= -4(n+1) + 3 = [-4n+3] - 4 = [u_n + v_n] - 4.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $u_0 + v_0 = 1$ et de raison 2, et que $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 - v_0 = 3$ et de raison -4.

2. Comme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $u_0 + v_0 = 1$ et de raison 2 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k + v_k) = (u_0 + v_0)\frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

Comme $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de terme initial $u_0 - v_0 = 3$ et de raison -4 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - v_k) = \frac{n\left((u_0 - v_0) + (u_{n-1} - v_{n-1})\right)}{2} = \frac{n\left(3 + (-4(n-1) + 3)\right)}{2} = n(-2n + 5).$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_k + v_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(u_k - v_k)\right) = \frac{1}{2}\left(2^n - 1 - 2n^2 + 5n\right) \\
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_k + v_k) - \sum_{k=0}^{n-1}(u_k - v_k)\right) = \frac{1}{2}\left(2^n - 1 + 2n^2 - 5n\right).
\end{aligned}$$