Corrigé du DM 5

Tran Viet Chi

8 janvier 2007

1 Exercice 39 : items 6, 10, 11, 12

On rappelle les développements limités classiques suivants en 0 :

$$\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)\\
\sin(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\cos(x) =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\ln(1+x) =& x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

DL en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$

Première étape : On commence par remplacer $cos(x)$ par son DL rappelé en début d'énoncé.

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)\right) = ln(1+X),$$

avec

$$X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)$$

qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0.
Deuxième étape : On utilise maintenant le DL en 0 de $ln(1+X)$. Comme la plus petite puissance de x dans X est en x^2, il est suffisant de considérer le DL de $\ln(1+X)$ jusqu'à l'ordre 3 (X^3) : au delà, les plus petites puissances seront en x^8 qui ne nous intéressent pas pour l'ordre 6 demandé par l'énoncé.

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X).$$

Troisième étape : On remplace dans l'expression précédente X par sa valeur.

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) =& \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)\right)^2\\
&+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^7\varepsilon(x)\right)^3 + x^6\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à développer les puissances.

- Notons que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dans le terme X^2, les puissances de x plus petites que 6 proviennent :
  - du terme $-x^2/2$ multiplié par lui même (ce terme correspond à a^2, donc pas de coefficient supplémentaire)
  - du terme $-x^2/2$ multiplié par $x^4/24$ (ce terme correspond à ab, donc coefficient supplémentaire de 2).
- Notons que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dans le terme X^3, les puissances de x plus petites que 6 proviennent du terme $-x^2/2$ au cube (ce terme correspond à a^3, donc pas de coefficient supplémentaire).

On a donc :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) =& -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720} \\
&-\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)\times\left(-\frac{x^2}{2}\right)+2\times\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x^4}{24}\right)\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+x^6\varepsilon(x) \\
&=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{24}+x^6\varepsilon(x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+x^6\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto e^{\sin(x)}$

On remplace $\sin(x)$ par son DL en 0.

$$e^{\sin(x)}=\exp\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)\right)=e^X,$$

où $X=x-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. On développe maintenant e^X à l'ordre 3 en 0, puis on remplace X par sa valeur.

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} =& 1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+X^3\varepsilon(X) \\
=& 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)^3+x^3\varepsilon(x) \\
=& 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

On constate qu'il n'y a pas de terme en x^3 dans ce développement.

DL en 0 à l'ordre 9 de $x \mapsto \sin^6(x)$

On remplace $\sin(x)$ par son DL en 0 à l'ordre 3. En effet, lorsqu'on prendra la puissance 6, les termes en x de puissance plus petite que 9 seront obtenus :
- en prenant la puissance 6 de x,
- en prenant la puissance 5 de x et un terme en x^3.

Il n'y a pas d'autre façon de former une puissance plus petite que 9 en prenant 6 termes, et on constate qu'on n'a besoin des termes du développement de $\sin(x)$ que jusqu'à la puissance 3.

$$\sin^6(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)\right)^6=x^6+6\times x^5\times\left(-\frac{x^3}{6}\right)+x^9\varepsilon(x).$$

(Le facteur 6 qui apparaît dans le terme $6x^5(-x^3/6)$ provient du fait que dans le développement de $(a+b)^6$, le coefficient devant a^5b est 6). On obtient donc :

$$\sin^6(x)=x^6-x^8+x^9\varepsilon(x).$$

DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$

Nous allons multiplier les DL de $\cos(x)$ et de $\ln(1+x)$. Comme le DL de $\cos(x)$ commence par 1, il faut développer $\ln(1+x)$ jusqu'à l'ordre 4. Comme le DL de $\ln(1+x)$ commence par x, il est suffisant de développer $\cos(x)$ jusqu'à l'ordre 3.

$$\cos(x)\ln(1+x)=\left(1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)\right).$$

On développe en ne retenant que les puissances de x plus petites que 4.

$$\cos(x)\ln(1+x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)\right)+\left(-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}\right)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x).$$

2 Exercice 42 : lignes 2 et 4

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(\cos(x)+x)}{x^2}$

On a une forme indéterminée 0/0. On développe e^x et $\cos(x)+x$ jusqu'à l'ordre minimal pour que les DL ne se compensent pas. Comme :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x), \quad \text{et} \quad \cos(x)+x = 1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x),$$

on voit que cet ordre est 2. Alors :

$$\frac{e^x-(\cos(x)+x)}{x^2} = \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)}{x^2} = \frac{x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2} = 1+\varepsilon(x),$$

qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/3}-1-\sin(x)}{1-\cos(x)}$

On développe à la fois le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{(1+3x)^{1/3}-1-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\left(1+\frac{1}{3}\times 3x+\frac{1}{3}\frac{-2}{3}\frac{1}{2}(3x)^2+x^2\varepsilon(x)\right)-\left(1+x+x^2\varepsilon(x)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)}$$

$$= \frac{-x^2+x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)} = \frac{-1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)},$$

qui tend vers -2 lorsque x tend vers 0.

Calculer $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

On réécrit l'expression avec des exponentielles et des logarithmes :

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x+x\varepsilon(x)\right)\right) = \exp\left(1+\varepsilon(x)\right),$$

qui tend vers e lorsque x tend vers 0.

Calculer $\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

En posant $X = 1/x$ ($\Leftrightarrow x = 1/X$), on a une nouvelle variable X qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On réécrit l'expression en fonction de cette nouvelle variable X, on réalise un DL en 0 avec les formules rappelées en début de document, puis on rétablit la variable x initiale.

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{X}ln(1+X^2) = \frac{1}{X}\left(X^2+X^2\varepsilon(X)\right) = X+X\varepsilon(X) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Calculer $\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On réalise le même changement de variable $X = 1/x$ que précédemment.

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(X)}{X} = \frac{X+X\varepsilon(X)}{X} = 1+\varepsilon(X),$$

qui tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ (X tend vers 0).

Calculer $\lim_{x\to +\infty}(1+2/x)^x$

On commence par passer à la forme avec les exponentielles et les logarithmes, puis on fait le changement de variable $X = 1/x$.

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{X}ln(1+2X)\right) = \exp\left(\frac{1}{X}\left(2X+X\varepsilon(X)\right)\right) = \exp\left(2+\varepsilon(X)\right),$$

qui tend vers e^2 lorsque x tend vers $+\infty$.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On réalise le changement de variable $X = 1/x$ pour développer $\sin(1/x)$.

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(X) = X + X\varepsilon(X) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit :

$$\frac{x^3+2x^2+1}{4x^2+3x+2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

qui tend vers $1/4$ lorsque $x \to +\infty$.

3 Exercice 44 item 7

Etudier les branches infinies de $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ **et la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles**

Le domaine de définition de f est $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Nous étudions seulement ce qui se passe en $+\infty$ le reste est en exercice !

Première étape : limite de f lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Ceci nous encourage à rechercher s'il y a une direction asymptotique.

Deuxième étape : Recherche de directions asymptotiques.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2.$$

On a une direction asymptotique $y = 2x$. Cherchons s'il y a une asymptote.

Troisième étape : Recherche d'asymptotes.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2-1} - 2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.\end{aligned}$$

On a donc une asymptote $y = 2x$.

Quatrième étape : Position de la courbe par rapport à son asymptote : on réalise un DL de $f(x)-2x$ en $+\infty$. Pour cela, on effectue le changement de variable $X = 1/x$ (qui tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$), on utilise les DL classiques rappelés en début d'énoncé, et on rétablit la variable initiale x.

$$\begin{aligned}f(x) - 2x &= \sqrt{x^2-1} - x = |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1\right) \quad (\text{ car } x > 0 \text{ quand } x \to +\infty) \\ &= \frac{1}{X}\left(\sqrt{1-X^2} - 1\right) = \frac{1}{X}\left(\left(1 + \frac{1}{2}(-X^2) + X^2\varepsilon(X)\right) - 1\right) = -\frac{X}{2} + X\varepsilon(X) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

dont le terme principal $-1/2x$ est négatif en $+\infty$. On en déduit que la courbe est sous son asymptote en $+\infty$.