Corrigé du DM 4

Tran Viet Chi

19 novembre 2006

1 Exercice 21

Question 1.1. *Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe :*

Soit f une application continue du segment $[a, b]$ dans lui-même. En posant $g(x) = f(x) - x$:

$$(x_0 \text{ est un point fixe de } f) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow (x_0 \text{ est un zéro de } g)\,.$$

Ainsi, montrer que f admet un point fixe est équivalent à montrer que g admet un zéro.

Comme f est à valeur dans $[a, b]$, on a pour tout $x \in [a, b]$, $a \leq f(x) \leq b$. En particulier $a \leq f(a) \leq b$, et en retranchant a à chaque membre de l'inégalité $0 \leq f(x) - a \leq b - a$, soit encore par définition de g :

$$0 \leq g(a) \leq b - a.$$

De même, en retranchant b à chaque membre de l'inégalité $a \leq f(b) \leq b$ on obtient :

$$a - b \leq g(b) \leq 0.$$

Nous avons :

1. g continue comme différence de deux fonctions continues,
2. $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$,

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, pour $0 \in [g(a), g(b)]$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$. Comme $g(x_0) = f(x_0) - x_0$, alors $g(x_0) = 0$ implique que $f(x_0) = x_0$, et f admet un point fixe sur $[a, b]$.

Question 1.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe.*

Nous considérons de même que précédemment la fonction $g(x) = f(x) - x$.

Le fait que la fonction f est bornée signifie qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. On en déduit que :

$$-M \leq f(x) \leq M, \quad \text{et en retranchant x} \quad -M-x \leq f(x)-x \leq M-x, \quad \text{soit} \quad -M-x \leq g(x) \leq M-x.$$

Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} \pm M - x = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \pm M - x = +\infty,$$

alors par le théorème des gendarmes (par encadrement),

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Comme g est continue, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, et donc $f(x_0) = x_0$. Nous venons de prouver que f admet un point fixe.

2 Exercice 24, items 3, 4, 5

Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et dire si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

Question 2.1. $h(x) = \sin(x) \sin(1/x)$.

Comme $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors par composition, $x \mapsto \sin(1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, h est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Pour savoir si on peut prolonger h par continuité en 0, on cherche à montrer que les limites $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ existent et coïncident. On sait que $\sin(x)$ est continue en 0 et tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Le terme qui nous pose problème est $\sin(1/x)$, mais on sait qu'il est borné par 1. On pense donc à un raisonnement par encadrement. On a :

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1, \text{ et en multlipliant par } |\sin(x)| \geq 0 \text{ on a } -|\sin(x)| \leq h(x) \leq |\sin(x)|.$$

Comme :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0, \text{ alors } \lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0,$$

et par encadrement :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

Le fait que la limite existe signifie que les limites à droite et à gauche en 0 existent et coïncident, et on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

Question 2.2. $k(x) = |\sin(x)|/x$.

Comme $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto 1/x$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$, alors $k(x) = \sin(x) \times (1/x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit.

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \text{ par cours, et } \lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1.$$

Les limites à gauche et à droite étant différentes, la fonction k n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Question 2.3. $m(x) = \left(\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}\right)/x$.

Les fonctions $x \mapsto 1+\sin(x)$ et $x \mapsto 1-\sin(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par quotient, m est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

A l'exercice 15.1 (cf. corrigé du DM 3), on a vu que :

$$\lim_{x\to 0} m(x) = 1,$$

on en déduit que les limites à droite et à gauche en 0 existent et coïncident, et on peut prolonger m par continuité en 0 en posant $m(0) = 1$.