Corrigé des DM 3

Tran Viet Chi

6 novembre 2006

1 1 et 2 de l'Exercice 15

Calculer les limites suivantes : 1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}$.
On a une forme indéterminée $+\infty-\infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}\\ &=\frac{x^2+x+1-x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{x+3}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\end{aligned}$$

Le numérateur tend vers 1 lorsque $x\to+\infty$, et le dénominateur vers 2. On en déduit que la limite recherchée est $1/2$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x}$.
On a une forme indéterminée $0/0$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x} &=\frac{\left(\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}\right)\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\\ &=\frac{1+\sin(x)-1+\sin(x)}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}=2\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1,\quad \text{et}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}=\frac{1}{2},$$

alors la limite recherchée est 1.

3. $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$, $\alpha>0$.
On a une forme indéterminée $0/0$. En remarquant que $\sqrt{x^2-\alpha^2}=\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}$:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}+1\right). \tag{1}$$

Nous avons pour le premier facteur :

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}},$$

Pour le second facteur, par multiplication par la forme conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{x-\alpha}\,(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x-\alpha}\,(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}},$$

on en déduit que :

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}=\frac{0}{2\sqrt{\alpha}}=0. \tag{2}$$

Par (1) et (2), la limite recherchée est donc $1/\sqrt{2\alpha}$.

4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln(x)}$. Pour le numérateur :

$$\lim_{x\to 0^+} x+2 = 2,$$

et pour le dénominateur,

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0^-, \quad \text{on en déduit } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2\ln(x)} = -\infty.$$

La limite recherchée est donc $-\infty$.

5. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$. Comme pour $x \leq 1$, on a : $2x \leq x+\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$, alors :

$$2x\ln(2x) \leq 2x\ln(x+\sqrt{x}) \leq 2x\ln(2\sqrt{x}). \tag{3}$$

Par le cours, on a pour le membre de gauche de (3) :

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(2x) = 0,$$

et pour le membre de droite de (3) :

$$\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(2\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x\ln(2) + 2x\times\frac{1}{2}\ln(x)\right) = 0,$$

alors dans (3) le membre de gauche et le membre de droite tendent vers 0. On en déduit par encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) que la limite égale 0.