Corrigé des DM 1 et 2

Tran Viet Chi

30 octobre 2006

1 Exercice 1

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1. \tag{1}$$

Démonstration. (La démonstration par récurrence procède en deux étapes)

Première étape : on montre que (1) est vraie pour $n = 1$.
On a en effet :

$$\sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1 = 1, \quad \text{et} \quad (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Seconde étape : supposons que (1) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que (1) est aussi vraie pour l'entier suivant $n+1$. (Ceci revient à montrer que : $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1$). On a en effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \times k!\right) + (n+1) \times (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!, \text{ par l'hypothèse de récurrence ((1) satisfaite pour n)} \\
&= (n+1)!\,(1 + (n+1)) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Conclusion : Nous avons montré que (1) était vrai pour $n = 1$ et pour $n+1$ si elle était vraie pour n. Donc, cette propriété est vraie pour tout entier, par récurrence. ∎

2 Exercice 2

Montrer par récurrence que pour tout entier plus grand que 1 :

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2}$$

Démonstration. Première étape : on montre que (2) est vraie pour $n = 1$. On a en effet :

$$\frac{1}{1!} = 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

Seconde étape : supposons que (2) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que (2) est aussi vraie pour l'entier suivant $n+1$. (Ceci revient à montrer que : $1/(n+1)! \leq 1/2^n$). On a :

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n! \times (n+1)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence (qui est que l'on suppose (2) satisfaite pour n). Comme $n \geq 1$, alors $n+1 \geq 2$ et

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}. \tag{3}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $1/2^{n-1}$ positif :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2^n},$$

et on en déduit :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}, \tag{4}$$

ce que l'on voulait montrer.

Conclusion : Nous avons montré que (2) était vrai pour $n = 1$ et pour $n + 1$ si elle était vraie pour n. Donc, cette propriété est vraie pour tout entier, par récurrence. ∎

3 Exercice 3 (item 7 de l'exercice 9 du recueil d'exercice 1)

Etudier la monotonie de :

$$f : x \mapsto x + 2x\ln(x). \tag{5}$$

Démonstration. 1. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+^*$ (sinon, $\ln(x)$ n'est pas défini).
2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition de dérivée :

$$f'(x) = 1 + 2\ln(x) + 2 = 3 + 2\ln(x).$$

3. Nous cherchons le signe de f' (Pour cela, nous recherchons les points où f' s'annule, puis nous faisons un tableau de variations).

$$f'(x) = 0 \iff 3 + 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -\frac{3}{2} \iff x = e^{-3/2}.$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		3/2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		décroissante		croissante	

La fonction f n'est donc pas monotone. ∎

4 Exercice 4 (items e et f de l'exercice 11)

Question 4.1. *Déterminer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}. \tag{6}$$

Démonstration. On a une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Comme nous avons une différence de deux racines, cela nous fait penser aux quantités conjuguées. Pour $x \neq -1$ ou 1 :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty,$$

on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = +\infty,$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0.$$

∎

Question 4.2. *Déterminer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right). \tag{7}$$

Démonstration. Il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! En effet :

$$\lim_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty \text{ implique } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty,$$

d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = -\infty.$$

■

Question 4.3. *Déterminer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right). \tag{8}$$

Démonstration. On a :

$$\sqrt{1+x^2}-x = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

On en déduit :

$$x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1}$$

en simplifiant numérateur et dénominateur par x. Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1,$$

alors :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

■

5 Exercice 5 (Exercice 12 de la fiche)

Question 5.1. *Montrer que :*

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1. \tag{9}$$

Démonstration. On a une forme indéterminée $0/0$. En multipliant et en divisant par les quantités conjuguées, pour $x \neq \pm1$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \\ &= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{x\to0} \sqrt{1\pm x} = 1,$$

on a :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1.$$

■

Question 5.2. *Soient m et n des entiers positifs. Etudier*

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$$

Démonstration. Nous avons une forme indéterminée 0/0. En faisant intervenir les quantités conjuguées, on a pour $x \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m} &= \frac{\left(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}\right)\left(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}\right)}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \\ &= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = \frac{2x^m}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} \times \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = x^{m-n} \times \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}.$$

On a d'une part :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1. \tag{10}$$

D'autre part :

- Si $m > n$, alors $\lim_{x\to 0} x^{m-n} = 0$, et on déduit de ce résultat et de (10) que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = 0.$$

- Si $m < n$, alors $\lim_{x\to 0^+} x^{m-n} = \lim_{x\to 0^+} 1/x^{n-m} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} x^{m-n} = -\infty$, et on déduit de ce résultat et de (10) :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = -\infty.$$

- Si $m = n$, alors $\lim_{x\to 0} x^{m-n} = \lim_{x\to 0} x^0 = 1$, et de ce résultat et de (10) on déduit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = 1.$$

■

Question 5.3. *Montrer que :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right) = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Démonstration. Nous pouvons commencer par remarquer qu'il s'agit d'une forme indéterminée 0/0. Nous remarquons aussi que le discriminant de $1 + x + x^2$ est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$; comme $a = 1$, on voit que le polynôme sous la racine ne s'annule jamais et est toujours positif.

En multipliant par la quantité conjuguée on peut simplifier la parenthèse de (11) :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x+x^2} - 1 &= \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} \\ &= \frac{1+x+x^2-1}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2} + 1}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right) = \frac{1}{x}\frac{x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1}.$$

Comme :

$$\lim_{x \to 0} 1 + x = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \sqrt{1+x+x^2} + 1 = 2,$$

alors on obtient bien (11). ■