

# Correction - Séries chronologiques

10 janvier 2007

## 1 Exercice 1

$y_t = \varepsilon_t$  : graphique 6 ;  $y_t = s_t + \varepsilon_t$  : graphique 1 ;  $y_t = at + s_t + \varepsilon_t$  : graphique 4 ;  $y_t = at \times s_t \times \varepsilon_t$  : graphique 3 ;  $y_t = f_t \times \varepsilon_t$  : graphique 5 ;  $y_t = f_t + \varepsilon_t$  : graphique 2.

## 2 Exercice 2

1. Moyenne mobile centrée d'ordre impair ( $p = 2k + 1$ ) est définie par :

$$mm_{p,t} = \frac{1}{p} \sum_{i=-k}^k y_{t+i}$$

Moyenne mobile centrée d'ordre pair ( $p = 2k$ ) est définie par :

$$mm_{p,t} = \frac{1}{p} \left[ \sum_{i=-k+1}^{k-1} y_{t+i} + \frac{1}{2}y_{t-k} + \frac{1}{2}y_{t+k} \right]$$

$$mm_{3,2}(X) = \frac{1}{3}(102 + 104 + 106) = 104 \quad mm_{4,3}(X) = \frac{1}{4} \left( \frac{102}{2} + 104 + 106 + 108 + \frac{110}{2} \right) = 106$$

| Temps | X   | mm <sub>3</sub> (X) | mm <sub>4</sub> (X) | Y   | mm <sub>3</sub> (Y) | mm <sub>4</sub> (Y) |
|-------|-----|---------------------|---------------------|-----|---------------------|---------------------|
| 1     | 102 | -                   | -                   | 203 | -                   | -                   |
| 2     | 104 | 104                 | -                   | 206 | 206                 | -                   |
| 3     | 106 | 106                 | 106                 | 209 | 209                 | 209                 |
| 4     | 108 | 108                 | 108                 | 212 | 212                 | 212                 |
| 5     | 110 | 110                 | 110                 | 215 | 215                 | 215                 |
| 6     | 112 | 112                 | 112                 | 218 | 218                 | 218                 |
| 7     | 114 | 114                 | 114                 | 221 | 221                 | 221                 |
| 8     | 116 | 116                 | 116                 | 224 | 224                 | 224                 |
| 9     | 118 | 118                 | 118                 | 227 | 227                 | 227                 |
| 10    | 120 | 120                 | 120                 | 230 | 230                 | 230                 |
| 11    | 122 | 122                 | 122                 | 233 | 233                 | 233                 |
| 12    | 124 | 124                 | 124                 | 236 | 236                 | 236                 |
| 13    | 126 | 126                 | 126                 | 239 | 239                 | 239                 |
| 14    | 128 | 128                 | 128                 | 242 | 242                 | 242                 |
| 15    | 130 | 130                 | -                   | 245 | 245                 | -                   |
| 16    | 132 | -                   | -                   | 248 | -                   | -                   |

FIG. 1 – Moyennes mobiles des séries X et Y.

2. Lorsque nous appliquons une moyenne mobile centrée (paire ou impaire) sur une série chronologique composée que d'une tendance, la moyenne mobile n'a aucune influence sur cette série. La série chrono se voit tronquée d'autant de valeurs que la longueur de la moyenne mobile centrée divisée par 2 à chaque extrémité.

### 3.1.

| Temps | Z   | mm <sub>3</sub> (Z) | mm <sub>4</sub> (Z) | mm <sub>3</sub> (X)+mm <sub>3</sub> (Y) | mm <sub>4</sub> (X)+mm <sub>4</sub> (Y) |
|-------|-----|---------------------|---------------------|---|---|
| 1     | 305 | -                   | -                   | -                                       | -                                       |
| 2     | 310 | 310                 | -                   | 310                                     | -                                       |
| 3     | 315 | 315                 | 315                 | 315                                     | 315                                     |
| 4     | 320 | 320                 | 320                 | 320                                     | 320                                     |
| 5     | 325 | 325                 | 325                 | 325                                     | 325                                     |
| 6     | 330 | 330                 | 330                 | 330                                     | 330                                     |
| 7     | 335 | 335                 | 335                 | 335                                     | 335                                     |
| 8     | 340 | 340                 | 340                 | 340                                     | 340                                     |
| 9     | 345 | 345                 | 345                 | 345                                     | 345                                     |
| 10    | 350 | 350                 | 350                 | 350                                     | 350                                     |
| 11    | 355 | 355                 | 355                 | 355                                     | 355                                     |
| 12    | 360 | 360                 | 360                 | 360                                     | 360                                     |
| 13    | 365 | 365                 | 365                 | 365                                     | 365                                     |
| 14    | 370 | 370                 | 370                 | 370                                     | 370                                     |
| 15    | 375 | 375                 | -                   | 375                                     | -                                       |
| 16    | 380 | -                   | -                   | -                                       | -                                       |

FIG. 2 – Moyennes mobiles de la série Z.

**3.2.** La série Z peut se réécrire comme  $z_t = x_t + y_t = 5 \times t + 300$ .

Nous vérifions ainsi que la moyenne mobile de la somme est égale à la somme des moyennes mobiles.

## 3 Exercice 3

1. Désaisonnaliser sert à séparer la tendance, les effets saisonniers, le bruit, qui ont chacun un sens économique différent. Ceci nous permet de mieux comprendre les données observées (interprétation des résultats numérique, sens de la tendance, comparaison des effets saisonniers, estimation de la variance du bruit...) et de faire des prévisions.

2. On choisit un modèle additif.

3. Soient  $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4$  les coefficients saisonniers de chaque trimestre. Nous avons  $s_t = \tilde{s}_{t - [(t-1)/4] * 4}$ . Le principe de conservation des aires est une contrainte d'identifiabilité du modèle. Elle exprime que la moyenne des coefficients saisonniers est nulle :

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \tilde{s}_j = 0. \quad (1)$$

4. La moyenne mobile centrée sur 4 points est :

$$mm_4(t) = \frac{1}{4} \left( \frac{Y_{t-2}}{2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + \frac{Y_{t+2}}{2} \right).$$

Cette moyenne mobile ne peut-être calculée qu'à partir du troisième trimestre de 1970, et jusqu'au second trimestre de 1980 (inclus). Pour l'année 1975 : 115,625 ; 114,125 ; 115,250 ; 117,750.

Dans le tableau "Première estimation des coefficients saisonniers", on a calculé  $y_t - mm_4(t)$ . Pour l'année 1979 : 6,000 ; 2,250 ; -17,375 ; 9,500.

En faisant la moyenne des coefficients saisonniers trimestre par trimestre, on trouve la première ligne du tableau 1. La moyenne des coefficients saisonniers ainsi trouvés est 0,100. Afin de satisfaire (1), on retranche à chacun de ces coefficients cette moyenne, ce qui nous fournit les estimateurs finaux des coefficients saisonniers : La série corrigée des variations saisonnières est la série des  $y_t - s_t$ . Pour l'année 1974 : 123,700 ; 125,338 ; 124,838 ; 118,125.

| Estimation | 1er trim | 2eme trim | 3eme trim | 4eme trim |
|------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| provisoire | 5,400    | 3,763     | -16,738   | 7,975     |
| finale     | 5,300    | 3,663     | -16,838   | 7,875     |

TAB. 1 – Estimation finale des coefficients saisonniers

## 4 Exercice 4

1. On observe un décrochement vers 1975-1976, et on a peut-être un changement de régime. On isole la partie 1976-1982 afin d'avoir des résultats plus robustes. On cherche à estimer le modèle  $y_t = at + b + s_t + \varepsilon_t$ .
2. Les MCO se réalisent directement sur les données  $y_1 \cdots y_{28}$ . On trouve :  $\bar{T} = 14.5$ ,  $\bar{Y} = 130.25$ ,  $V(T) = 65.25$ ,  $V(Y) = 133.688$ ,  $Cov(T, Y) = 22,089$ ,  $\hat{a} = 0.339$ ,  $\hat{b} = 125,34$ .

$R^2 = V(\hat{Y})/V(Y) = \hat{a}^2 V(T)/V(Y) = 5,59\%$ . Le  $R^2$  est mauvais à cause des effets saisonniers non négligeables qui se retrouvent dans le bruit.

3. Pour calculer les coefficients saisonniers, on calcule  $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{a}t - \hat{b}$ . On réalise alors la moyenne de la série trouvée par trimestre, ce qui nous fournit des estimations  $\tilde{s}$  des coefficients saisonniers. Comme  $\hat{\varepsilon}_t$  correspond au résidu de la régression de  $y_t$  sur  $t$  et 1, le principe des aires est automatiquement satisfait.

4. On trouve :

| T  | Y   | $\hat{Y} = \hat{a}T + \hat{b}$ | $\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$ | $\tilde{Y} = \hat{a}T + \hat{b} + \tilde{s}$ | $\tilde{\varepsilon} = Y - \tilde{Y}$ |
|----|-----|--------------------------------|-----------------------------------|--|---------------------------------------|
| 1  | 127 | 125,680                        | 1,320                             | 131,652                                      | -4,652                                |
| 2  | 127 | 126,018                        | 0,982                             | 129,795                                      | -2,795                                |
| 3  | 108 | 126,357                        | -18,357                           | 107,938                                      | 0,062                                 |
| 4  | 134 | 126,695                        | 7,305                             | 135,366                                      | -1,366                                |
| 5  | 133 | 127,034                        | 5,966                             | 133,006                                      | -0,006                                |
| 6  | 130 | 127,372                        | 2,628                             | 131,149                                      | -1,149                                |
| 7  | 107 | 127,711                        | -20,711                           | 109,292                                      | -2,292                                |
| 8  | 132 | 128,050                        | 3,950                             | 136,720                                      | -4,720                                |
| 9  | 133 | 128,388                        | 4,612                             | 134,360                                      | -1,360                                |
| 10 | 134 | 128,727                        | 5,273                             | 132,503                                      | 1,497                                 |
| 11 | 110 | 129,065                        | -19,065                           | 110,646                                      | -0,646                                |
| 12 | 140 | 129,404                        | 10,596                            | 138,074                                      | 1,926                                 |
| 13 | 138 | 129,742                        | 8,258                             | 135,714                                      | 2,286                                 |
| 14 | 136 | 130,081                        | 5,919                             | 133,857                                      | 2,143                                 |
| 15 | 118 | 130,419                        | -12,419                           | 112,000                                      | 6,000                                 |
| 16 | 146 | 130,758                        | 15,242                            | 139,429                                      | 6,571                                 |
| 17 | 145 | 131,096                        | 13,904                            | 137,068                                      | 7,932                                 |
| 18 | 138 | 131,435                        | 6,565                             | 135,211                                      | 2,789                                 |
| 19 | 115 | 131,773                        | -16,773                           | 113,354                                      | 1,646                                 |
| 20 | 141 | 132,112                        | 8,888                             | 140,783                                      | 0,217                                 |
| 21 | 137 | 132,450                        | 4,550                             | 138,423                                      | -1,423                                |
| 22 | 136 | 132,789                        | 3,211                             | 136,565                                      | -0,565                                |
| 23 | 115 | 133,128                        | -18,128                           | 114,708                                      | 0,292                                 |
| 24 | 143 | 133,466                        | 9,534                             | 142,137                                      | 0,863                                 |
| 25 | 137 | 133,805                        | 3,195                             | 139,777                                      | -2,777                                |
| 26 | 136 | 134,143                        | 1,857                             | 137,920                                      | -1,920                                |
| 27 | 111 | 134,482                        | -23,482                           | 116,062                                      | -5,062                                |
| 28 | 140 | 134,820                        | 5,180                             | 143,491                                      | -3,491                                |

TAB. 2 – Valeurs expliquées par la régression et estimation provisoire des coefficients saisonniers

En faisant la moyenne des  $\hat{\varepsilon}_t$  trimestre par trimestre, on obtient les estimations  $\tilde{s}$  des coefficients saisonniers :

|            | 1er trim | 2eme trim | 3eme trim | 4eme trim |
|------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| Estimation | 5,972    | 3,776     | -18,419   | 8,671     |

TAB. 3 – Estimation finale des coefficients saisonniers

On peut remarquer que la variance des résidus  $\tilde{\varepsilon}$  prenant en compte les coefficients saisonniers est de 10,11 et :

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{\text{Var}(\tilde{\varepsilon})}{\text{Var}(Y)} = 92\%,$$

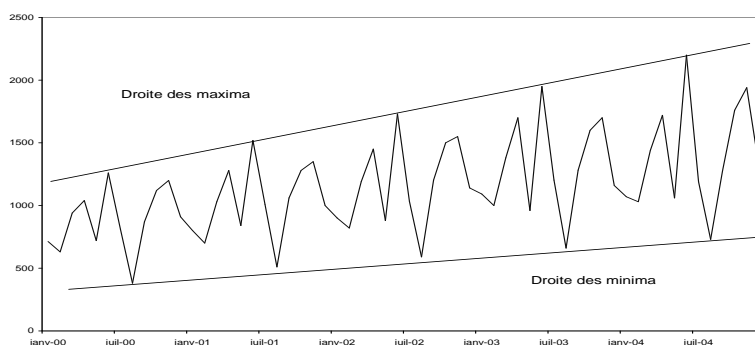
qui est bien meilleur que le résultat précédent !

5. On retrouve des coefficients semblables à ceux de l'exercice 3.

6. Les prévisions nous sont données par  $\tilde{y}_t = \hat{a}t + \hat{b} + \hat{s}_t$ , où  $\hat{s}_t$  est la série des coefficients saisonniers estimée. Pour l'année 1987, on trouve : 141,131 ; 139,274 ; 117,417 ; 144,845.

## 5 Exercice 5

1. Si nous traçons les deux droites passant par le minima et les maxima de la série, alors nous obtenons deux droites non parallèles. Le modèle est donc de type multiplicatif.



2. La longueur de la moyenne mobile doit être de 12 puisque la série est mensuelle. Nous pourrions ainsi éliminer la partie saisonnière (longueur de la MM = saison), conserver la composante tendancielle, et lisser la composante résiduelle (effet de Slutsky et Yule). Nous perdrons 6 valeurs en début et en fin de série puisque la moyenne mobile est centrée.

$$mm_{12,7}(X) = \frac{1}{12} \left( \frac{713}{2} + \sum_{i=-6+1}^{6-1} x_{t+12} + \frac{800}{2} \right) = 886.5$$

3. Pour calculer les coefficients saisonniers, il faut enlever la tendance (qui est approchée par les moyennes mobiles centrées) de la série. On calcule les rapports saisonniers (modèle multiplicatif) :

$$y_t = x_t / mm_{12,t}(X) \quad y_7 = 812 / 886.5 = 0.9159$$

Le coefficient saisonnier de chaque mois est obtenu en calculant la moyenne des rapports saisonniers de chaque mois.

La somme des coefficients saisonniers :  $\sum_{j=1}^{12} S_j = 12.011$ .

Nous procédons donc à une correction de ces coefficients saisonniers en calculant la moyenne et en divisant chacun des coefficients par la moyenne :  $\bar{S} = (1/12) \sum_{j=1}^{12} S_j = 1.001$ .

Le coefficient corrigé pour le mois de janvier est alors  $= 0.827 / 1.001 = 0.826$ .

La série corrigée des variations saisonnières est obtenue en divisant chaque valeur de la série initiale par son coefficient saisonnier respectif :

$$x_{CVS,1} = 713 / 0.826 \quad (2)$$

|             | janvier | février | mars   | avril  | mai    | juin   | juillet | août   | sept   | oct    | nov    | déc    |
|-------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>2000</b> | -       | -       | -      | -      | -      | -      | 886.5   | 893.1  | 899.8  | 913.5  | 928.5  | 944.3  |
| <b>2001</b> | 963.4   | 977.1   | 990.4  | 1005.0 | 1017.9 | 1027.9 | 1035.8  | 1045.0 | 1056.7 | 1070.4 | 1079.2 | 1089.6 |
| <b>2002</b> | 1099.3  | 1103.7  | 1113.0 | 1128.1 | 1145.6 | 1159.8 | 1173.6  | 1189.1 | 1204.5 | 1222.8 | 1236.6 | 1249.1 |
| <b>2003</b> | 1265.3  | 1275.3  | 1281.5 | 1288.9 | 1299.3 | 1306.4 | 1306.3  | 1306.7 | 1310.4 | 1313.8 | 1318.8 | 1333.3 |
| <b>2004</b> | 1343.2  | 1345.6  | 1348.3 | 1354.8 | 1371.5 | 1388.2 | -       | -      | -      | -      | -      | -      |

FIG. 3 – Moyennes mobiles centrées de longueur 12.

|             | janvier | février | mars   | avril  | mai    | juin   | juillet | août   | sept   | oct    | nov    | déc    |
|-------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>2000</b> | -       | -       | -      | -      | -      | -      | 0.9159  | 0.4255 | 0.9669 | 1.2261 | 1.2924 | 0.9636 |
| <b>2001</b> | 0.8304  | 0.7164  | 1.0400 | 1.2736 | 0.8252 | 1.4787 | 0.9751  | 0.4880 | 1.0032 | 1.1958 | 1.2510 | 0.9178 |
| <b>2002</b> | 0.8187  | 0.7430  | 1.0692 | 1.2854 | 0.7682 | 1.4917 | 0.8811  | 0.4962 | 0.9988 | 1.2267 | 1.2535 | 0.9127 |
| <b>2003</b> | 0.8630  | 0.7842  | 1.0769 | 1.3189 | 0.7388 | 1.4926 | 0.9209  | 0.5051 | 0.9783 | 1.2179 | 1.2891 | 0.8700 |
| <b>2004</b> | 0.7966  | 0.7655  | 1.0680 | 1.2695 | 0.7729 | 1.5848 | -       | -      | -      | -      | -      | -      |

FIG. 4 – Tableau des rapports saisonniers.

|           | coefficients saisonniers |          |
|-----------|--------------------------|----------|
|           | non corrigés             | corrigés |
| janvier   | 0,827                    | 0,826    |
| février   | 0,752                    | 0,752    |
| mars      | 1,064                    | 1,063    |
| avril     | 1,287                    | 1,286    |
| mai       | 0,776                    | 0,776    |
| juin      | 1,512                    | 1,511    |
| juillet   | 0,923                    | 0,922    |
| août      | 0,479                    | 0,478    |
| septembre | 0,987                    | 0,986    |
| octobre   | 1,217                    | 1,215    |
| novembre  | 1,271                    | 1,270    |
| décembre  | 0,916                    | 0,915    |
| Total     | 12,011                   | 12       |
| Moyenne   | 1,001                    | 1,000    |

FIG. 5 – Coefficients saisonniers.

|             | janvier | février | mars | avril | mai  | juin | juillet | août | sept | oct  | nov  | déc  |
|-------------|---------|---------|------|-------|------|------|---------|------|------|------|------|------|
| <b>2000</b> | 863     | 838     | 885  | 809   | 928  | 834  | 880     | 795  | 882  | 921  | 945  | 994  |
| <b>2001</b> | 968     | 931     | 969  | 996   | 1083 | 1006 | 1095    | 1066 | 1075 | 1053 | 1063 | 1093 |
| <b>2002</b> | 1089    | 1091    | 1120 | 1128  | 1135 | 1145 | 1121    | 1234 | 1220 | 1234 | 1220 | 1246 |
| <b>2003</b> | 1321    | 1331    | 1299 | 1322  | 1238 | 1291 | 1304    | 1380 | 1300 | 1316 | 1338 | 1267 |
| <b>2004</b> | 1295    | 1370    | 1355 | 1338  | 1367 | 1456 | 1290    | 1526 | 1296 | 1448 | 1527 | 1442 |

FIG. 6 – Série corrigée des variations saisonnières - série CVS.

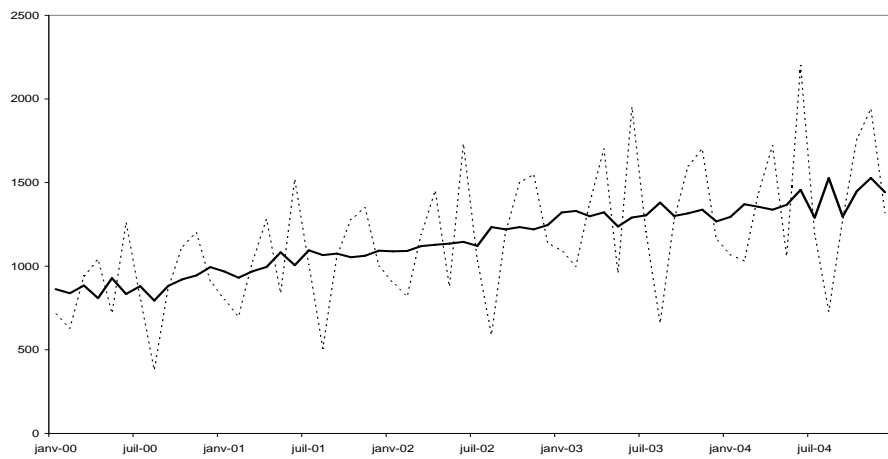


FIG. 7 – Série corrigée des variations saisonnières

## 6 Exercice 6

1. Le coefficient  $a$  est la tendance (pente, variation annuelle de la consommation de vin) tandis que le coefficient  $b$  est l'ordonnée à l'origine (consommation de vin à  $T=0$ , c'est-à-dire en 1967).

2. On trouve :  $\hat{a} = -0,870$ ,  $\hat{b} = 60,036$ .  $R^2 = V(\hat{C})/V(C) = \hat{a}^2 V(T)/V(C) = 0,97$ .  $V(\hat{\varepsilon}) = V(C) - V(\hat{C}) = V(C) - \hat{a}^2 V(T) = 1,353$ .

3. On a différencié la série intégrée, la rendant ainsi stationnaire :  $z_t = C_t - C_{t-1} = at + b - a(t-1) - b = a$ . En fait,  $C_t$  est bruitée et ne suit pas exactement (2). Il en est de même pour  $z_t$ . Comme :

$$\bar{z} = \frac{1}{27} \sum_{t=0}^{27} z_t = \frac{1}{27} \sum_{t=0}^{27} C_t - C_{t-1} = \frac{C_{27} - C_0}{27} = \frac{C_{1994} - C_{1967}}{27}, \quad (3)$$

ceci nous fournit un second estimateur de  $a$  :  $\tilde{a} = (C_{1994} - C_{1967})/27 = -0,811$ , très proche de  $\hat{a}$ .

4 On peut calculer :  $\hat{C}_t^{(1)} = \hat{a}t + \hat{b}$  (en utilisant les résultats de la question 2), ou  $\hat{y}_t^{(2)} = \hat{C}_{t-1}^{(2)} + \tilde{a}$  (en utilisant les résultats de la question 3). On obtient pour les années 1995 à 2000 les résultats suivants :

| Année | T  | $\hat{C}^{(1)}$ | $\hat{C}^{(2)}$ |
|-------|----|-----------------|-----------------|
| 1994  | 27 | 36,663          | 36,663          |
| 1995  | 28 | 35,685          | 35,852          |
| 1996  | 29 | 34,815          | 35,041          |
| 1997  | 30 | 33,945          | 34,230          |
| 1998  | 31 | 33,075          | 33,419          |
| 1999  | 32 | 32,206          | 32,608          |
| 2000  | 33 | 31,336          | 31,797          |